Tijdschrift van het
Nederlands Radiogenootschap

DEEL 25 No. 5–6 1960

Symposium Filtersynthese

Op woensdag 18 en donderdag 26 november 1959 werd in Delft een tweedaags Symposium gehouden over Filtersynthese, gebaseerd op het gebruik van functies met een complexe variabele. Dit symposium werd georganiseerd in samenwerking met het Koninklijk Instituut van Ingenieurs, Sectie voor Telecommunicatietechniek.

In de Symposium-commissie hadden zitting:

Prof. Dr. Ir. W. Th. Bähler (voorzitter)
Prof. Dr. C. E. Mulders (secretaris N.R.G.)
Dr. Ir. A. v. Weel
Prof. Ir. W. H. v. Zoest

Dit nummer bevat de tekst van alle op deze dagen gehouden voordrachten.

Symposium on filtersynthesis based on the application of functions with a complex variable

Summary

The intention of the symposium held in Delft on 18 and 26 November 1959 was to give in a series of lectures a coherent review of the theory and application of the methods used in synthesising electrical filters. Only passive networks were discussed. Out of the different sort of filters e.g. electrical, electro-mechanical and electro-acoustical filters, electrical filters were chosen with a further restriction that only the synthesis of those filters came under view from which the real part of the transferexponent as a function of frequency is prescribed.

The opening lecture given by W. Th. Bähler is a survey of properties of networkfunctions with a complex variable.

The second lecture gives the transformation from a lowpass filter into a highpass or a bandpassfilter.

The brickwall characteristic for the attenuation is discussed in connection with the Bode relation between real and imaginary part of the transfer-exponent.

Methods for approximation of a prescribed attenuation characteristic are dealt with. Examples are given for the maximally flat characteristic and the type Tschebyschew I with a ripple in the passband of a lowpass filter.

The lecture given by W. Nijenhuis continues with the theoretical part. Here has been dealt with the problem of filters according to Tschebyschew II (a ripple in the passband as well as in the attenuation-band).

By inspection of the surface $|f(p)| = |f(\sigma + j\omega)|$ with peaks in the neighbourhood of poles and pits in the vicinity of zero's a stylish method is given for the introduction of elliptical functions.

The contribution of W. Milort consists of two lectures.

The first lecture deals with the theory of the synthesis of the transfer-function of a filter with Tschebyschew properties in both the passband and the attenuationband. After survey of the different quadrupole parameters a set of the so called characteristic polynomials is derived. The starting point for the design and the means for compensating for the losses are discussed.

The second lecture deals with the application of the theory with several examples for the synthesis of filter according to the method of Darlington and Cauer.

The contribution of A. Fettweis.

This paper gives a review of the various aspects of the design of insertion loss filters with Tschebyschew passband behaviour and arbitrary position of the attenuation poles. First, the general theory of purely reactive four-poles is briefly reviewed and the role of the characteristic function is discussed. This is followed by a more detailed discussion of the establishment of the characteristic function. The importance of the Tschebyschew approximation from the point of view of optimum filter design is pointed out and the so called reference filter is introduced. It is shown, how the image attenuation poles of the reference filter can, in practice, be determined, and explicit formulae for the coefficients of the characteristic function are given. The calculation of the characteristic polynomial g is then described and a method for improving the original polynomials f and h is indicated. The next sections are devoted to the problem of finding a suitabte filter structure and to the problem of computing its elements. Finally the predistortion method is briefly discussed.

Theoretische inleiding van het symposium "Filtersynthese gebaseerd op het gebruik van functies met een complexe variabele"

Deel I

door W. Th. Bähler *)

1. Nomenclatuur en symbolen

Uit de elementaire wisselstroomtheorie is bekend, dat schakelverschijnselen gedempte trillingen opleveren. De wortels van de karakteristieke vergelijking in p, die ontstaat nadat in de homogene differentiaalvergelijking bijv. $i = A\varepsilon^{pt}$ wordt gesubstitueerd, leveren de *eigenfrequenties* van het systeem.

Als de vergelijking een tweede lid heeft in de vorm van een gedempte harmonische trilling, kan analoog aan de behandeling van ongedempte harmonische trillingen een complexe storingsfunctie ingevoerd worden. De spanning:

$$e_1 = \hat{e}\varepsilon^{-\sigma t} \cos(\omega t + \Theta)$$

gaat met:

$$je_2 = j\hat{e}\varepsilon^{-\sigma t} \sin(\omega t + \Theta)$$

over in:

$$e_1 + je_2 = \mathbf{e} = \hat{e}\varepsilon^{(-\sigma + j\omega)t + j\Theta} = \hat{e}\varepsilon^{j\Theta} . \varepsilon^{pt}$$

Bij samengestelde netwerken ontstaan bij toepassing van de wet van Faraday-Maxwell een aantal simultane differentiaalvergelijkingen in de onafhankelijk veranderlijke i_1, i_2, enz. Teneinde een differentiaalvergelijking te krijgen in één van de veranderlijken, moeten de overige veranderlijken geëlimineerd worden. Bij dit eliminatieproces ontstaan hogere afgeleiden van i en van de storingsfunctie e_0.

Men krijgt dan een differentiaalvergelijking van het type:

$$a_n \frac{d^n i}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots . a_0 i = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \ldots . + b_0 e_0$$

Dan zullen er oplossingen zijn van het type:

$$\mathbf{i} = \hat{i}\varepsilon^{j\psi} . \varepsilon^{pt}$$

$p = -\sigma + j\omega$ voor een gedempte trilling en
$p = \sigma + j\omega$ voor een aangroeiende trilling.

*) Technische Hogeschool, Delft.

Het tijdsafhankelijke deel van het argument van **e** of **i** is pt. Men noemt p de *complexe frequentie*.

Een term in de differentiaalvergelijking van het type $L\frac{di}{dt}$ levert bij substitutie van $\mathbf{i} = \hat{i}\varepsilon^{(pt + j\psi)}$ een term $pL\mathbf{i}$ en een term $\frac{\int i\,dt}{C}$ of $\frac{q}{C}$ levert $\frac{\mathbf{i}}{pC}$.

Het invoeren van complexe frequenties levert voordelen op bij het stabiliteitsonderzoek en maakt de overgang tussen analyse en synthese eenvoudiger. In vele gevallen kan het onderzoek van functies van een complexe frequentie inzicht geven voor het geval dat $p = j\omega$. Aangezien wij verder met complexe frequenties werken, kunnen $\bar{e}$ en $\bar{i}$ vervangen worden door e en i. In de enkele gevallen, dat e of i de ogenblikswaarde van een spanning of stroom voorstelt, zal er op gewezen worden. De overgang naar reële frequenties geschiedt door $\sigma = 0$ te stellen, waardoor p de waarde $j\omega$ krijgt.

De notatie is dan:

$$\mathbf{E} = E\varepsilon^{j\Theta}$$

E is de effectieve waarde.

2. Rationele functies van een complexe variabele

$$f(p) = H.\frac{p^m + a_{m-1}p^{m-1}\ldots. + a_0}{p^n + b_{n-1}p^{n-1}\ldots. + b_0}$$

$$p = \sigma + j\omega$$

Er wordt aangenomen, dat de coëfficiënten a_k, resp. b_k reëel zijn.

Stel de wortels van de teller zijn: $z_1 \ldots\ldots z_m$ (z = nulpunt (zero) = wortel van de teller)
en van de noemer; $p_1 \ldots\ldots p_n$ (p = pool = wortel van de noemer)

$$f(p) = H.\frac{(p - z_1)\,(p - z_2)\,\ldots\ldots\,(p - z_m)}{(p - p_1)\,(p - p_2)\,\ldots\ldots\,(p - p_n)}$$

In het bovenstaande voorbeeld is aangenomen, dat er enkelvoudige wortels in teller en noemer zijn, d.w.z. enkelvoudige nulpunten en polen. Aangezien de coëfficiënten reëel zijn, moeten de wortels, als ze complex zijn, in toegevoegd complexe paren voorkomen.

Stel eens een wortel is $z_1 = \sigma_1 + j\omega_1$, dan is de toegevoegd complexe wortel $z_2 = \sigma_1 - j\omega_1$.

$$\begin{aligned}(p - z_1)(p - z_2) &= (p - \sigma_1 - j\omega_1)(p - \sigma_1 + j\omega_1) \\ &= (p - \sigma_1)^2 - j^2\,\omega_1^2 \\ &= (p - \sigma_1)^2 + \omega_1^2 = p^2 - 2p\sigma_1 + \sigma_1^2 + \omega_1^2\end{aligned}$$

Er kunnen ook imaginaire nulpunten voorkomen. Dit levert een term $p^2 + \omega_1^2$. Hetzelfde geldt voor polen.

Als σ negatief is, worden de coëfficiënten positief.

Voorstelling van nulpunten en polen in het complexe vlak

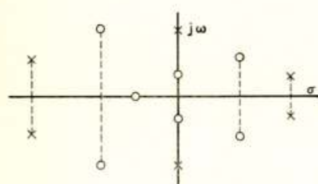


fig. 1
Voorstelling van nulpunten en polen in het complexe vlak.

Een nulpunt van $f(p)$ wordt voorgesteld door *o* in het complexe vlak en een pool door *x* (fig. 1).
De functie is, afgezien van een constante factor, bepaald door nulpunten en polen. Als de variabele p in de buurt is van een nulpunt, wordt de modulus van $f(p)$ klein en in de buurt van een pool zeer groot.

$$f(p) = f(\sigma + j\omega) = f_1(\sigma,\omega) + jf_2(\sigma,\omega)$$

$f_1(\sigma,\omega)$ is de vergelijking van een oppervlak. f_1 is de hoogte boven het vlak met orthogonale coördinaten σ en ω. Hetzelfde geldt voor $f_2(\sigma,\omega)$. $f(p)$ kan dus voorgesteld worden door twee oppervlakken boven een σ,ω-vlak. Een andere methode is om de complexe functie weer te geven door modulus en argument als functie van ω.

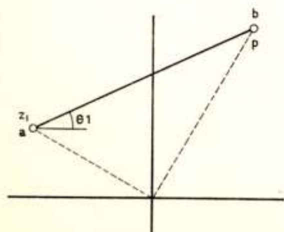


fig. 2
Wijzervoorstelling van complexe grootheden.

Wijzer-interpretatie van $f(p)$

p is een grootheid in het complexe vlak en kan dus voorgesteld worden door een wijzer. Evenzo kan een nulpunt of een pool voorgesteld worden door een wijzer. p kan als variabele op elk punt voorkomen, de nulpunten en polen alleen op bepaalde plaatsen. De factor $p - z_1$ wordt voorgesteld door de wijzer *ab* (fig. 2).

Met de notatie $p - z_1 = T_1 \varepsilon^{j\Theta_1}$, enz. wordt

$$f(p) = H. \frac{T_1 \ldots\ldots\ldots T_m \, \varepsilon^{j(\Theta_1 + \ldots . \Theta_m)}}{N_1 \ldots\ldots\ldots N_n \, \varepsilon^{j(\psi_1 + \ldots . \psi_n)}}$$

Van bijzonder belang is het gedrag van $f(p)$ als functie van $j\omega$, dus langs de imaginaire as.
Voorbeeld (fig. 3, 4 en 5).

$$f(p) = H. \frac{T_1 \, \varepsilon^{j\Theta_1}}{N_1 \, \varepsilon^{j\psi_1} \, N_2 \, \varepsilon^{j\psi_2}} = H. \frac{T_1}{N_1 N_2} \varepsilon^{j(\Theta_1 - \psi_1 - \psi_2)}$$

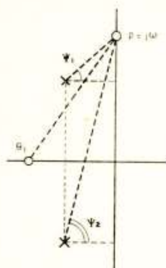


fig. 3
Voorbeeld van een complexe functie met 1 nulpunt en 2 polen.

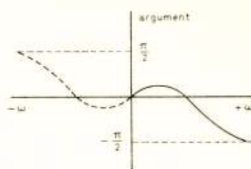


fig. 5
Argument van $f(p)$.

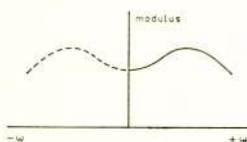


fig. 4
Modulus van $f(p)$.

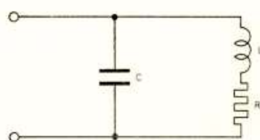


fig. 6
Netwerk behorend bij fig. 3.

Bijpassende schakeling (fig. 6):

$$z = \frac{pL + R}{p^2 LC + pCR + 1} = \frac{L\left[p + \frac{R}{L}\right]}{LC\left[p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}\right]}$$

$$z_1 = -\frac{R}{L} \qquad p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0$$

$$p = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \qquad \text{Stel } \frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$$

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

3. Polynomen met reële coëfficiënten, waarvan de wortels in de linkerhelft van het complexe vlak liggen

$$f(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots\ldots a_0$$
$$= a_n (p - p_1)(p - p_2) \ldots\ldots\ldots (p - p_n)$$

Een wortel op de negatieve reële as $p_1 = -\sigma_1$ geeft een factor $p - p_1 = p + \sigma_1$. Een geconjugeerd stel wortels $p_2 = -\sigma_2 + j\omega_2$ en $p_3 = p_2^* = -\sigma_2 - j\omega_2$ levert de factoren:

$$(p - p_2)(p - p_3) = (p + \sigma_2 - j\omega_2)(p + \sigma_2 + j\omega_2) = (p + \sigma_2)^2 + \omega_2^2 =$$
$$= p^2 + 2p\sigma_2 + \sigma_2^2 + \omega_2^2$$

Als alle wortels van een polynoom in het linker halfvlak liggen, komen *alle machten van p* voor en *alle coëfficiënten* zijn positief. Het positief zijn van de coëfficiënten en het voorkomen van alle machten van p is wel een noodzakelijke, maar niet voldoende voorwaarde voor de eis, dat alle wortels van het polynoom een negatief reëel deel hebben.

Beschouw het product:

$$f(p) = (p + \sigma_1)(p^2 - 2p\sigma_2 + \sigma_2^2 + \omega_2^2) =$$
$$= p^3 + p^2(\sigma_1 - 2\sigma_2) + p(\sigma_2^2 + \omega_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2) + \sigma_1(\sigma_2^2 + \omega_2^2)$$

Deze functie heeft een reële wortel $-\sigma_1$ en een stel toegevoegd complexe wortels $p_{2,3} = \sigma_2 \pm j\omega_2$. Alle coëfficiënten van p kunnen positief zijn en alle machten van p kunnen voorkomen.

Hurwitz polynomen

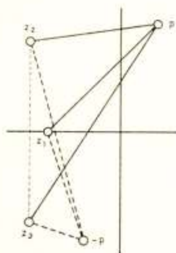


fig. 7
Polynoom met 3 wortels in het linker halfvlak met wijzers naar een punt p en een punt $-p$.

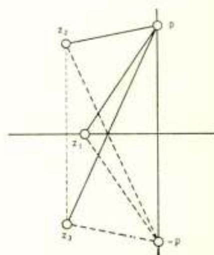


fig. 8
Polynoom met 3 wortels in het linker halfvlak met wijzers naar een punt p en een punt $-p$ op de imaginaire as.

In de figuren 7 en 8 zijn de wortels aangegeven van een derde-

graadsfunctie met wortels in de linkerhelft. In fig. 7 is een willekeurige waarde van p aangegeven en tevens een punt met de negatieve waarde van p. Voor een punt p in de rechterhelft is de modulus van $f(p)$ groter dan voor een punt $-p$ in de linkerhelft. De wortels van $f(p)$ liggen volgens de veronderstelling in het linkerhalfvlak en dus *niet op de imaginaire as*. In fig. 8 zijn p en $-p$ aangebracht op de imaginaire as. Uit de figuren volgt:

$|f(p)| > |f(-p)|$ als $Re(p) > 0$ p ligt in de rechterhelft
$|f(p)| = |f(-p)|$ als $Re(p) = 0$ p ligt op de imaginaire as
$|f(p)| < |f(-p)|$ als $Re(p) < 0$ p ligt in de linkerhelft

of anders geformuleerd met $\Phi(p) = \dfrac{f(p)}{f(-p)}$

$$|\Phi(p)| > 1 \quad \text{als} \quad Re(p) > 0$$
$$|\Phi(p)| = 1 \quad \text{als} \quad Re(p) = 0$$
$$|\Phi(p)| < 1 \quad \text{als} \quad Re(p) < 0$$

Dit gaat alleen op als alle wortels in het linkerhalfvlak liggen. Als er meer wortels zijn in het linkerhalfvlak, blijven bovenstaande betrekkingen geldig.

Als aan bovenstaande voorwaarden is voldaan, is $f(p)$ een hurwitz polynoom (H.P.). Deze voorwaarden kunnen in een vorm gebracht worden, die het onderzoek vereenvoudigd.

We schrijven $f(p) = m(p) + n(p)$, waarbij $m(p)$ de termen zijn met even machten en $n(p)$ de termen met oneven machten.

$$f(p) = a_r p^r + a_{r-1} p^{r-1} + \ldots\ldots\ldots\ a_0$$

Voor even r geldt:

$$m(p) = a_r p^r + a_{r-2} p^{r-2} + \ldots\ldots\ldots\ a_0$$
$$n(p) = a_{r-1} p^{r-1} + a_{r-3} p^{r-3} + a_1 p$$

In het algemeen is dus:

$$f(p) = m(p) + n(p)$$
$$f(-p) = m(p) - n(p)$$

Dus $f(p) + f(-p) = 2\,m(p)$
$f(p) - f(-p) = 2\,n(p)$

We voeren nu een nieuwe functie in:

$$\psi(p) = \frac{f(p) + f(-p)}{f(p) - f(-p)} = \frac{m\,(p)}{n\,(p)}$$

Hieruit volgt:

$$\psi(p) = \frac{\dfrac{f(p)}{f(-p)} + 1}{\dfrac{f(p)}{f(-p)} - 1} = \frac{\Phi\,(p) + 1}{\Phi\,(p) - 1} = \frac{r^2 - 1}{N} - \frac{j2r\sin\Theta}{N}$$

Hierbij is gesteld: $\Phi\,(p) = r\,\varepsilon^{j\Theta}$ $\qquad |\Phi\,(p)| = r$

$$N = \left[r\cos\Theta - 1\right]^2 + r^2\sin^2\Theta$$

De betrekking tussen $\Phi(p)$ en $\psi(p)$ is een zgn. gebroken lineaire transformatie. De eenheidscirkel in het Φ–vlak wordt getransformeerd naar het ψ–vlak. Het gedeelte binnen de eenheidscirkel in het Φ–vlak wordt getransformeerd naar het linker ψ–vlak en het deel van het Φ–vlak buiten de eenheidscirkel wordt getransformeerd naar het rechter ψ–vlak. De omtrek van de eenheidscirkel in het Φ–vlak wordt de imaginaire as van het ψ–vlak.

De volgende betrekkingen gelden voor $\psi(p)$:

$Re(\psi) > 0$ als $|\Phi(p)| > 1$ en dus als $Re(p) > 0$
$Re(\psi) = 0$ als $|\Phi(p)| = 1$ en dus als $Re(p) = 0$
$Re(\psi) < 0$ als $|\Phi(p)| < 1$ en dus als $Re(p) < 0$

Onderzoek van de nulpunten en polen van $\psi(p) = \dfrac{m\,(p)}{n(p)}$

Aangezien $m(p)$ en $n(p)$ gevormd zijn door de even en oneven machten van $f(p)$, kunnen de hoogste machten van p in teller en noemer niet meer dan de eenheid verschillen. Als de hoogste macht van p even is, heeft de teller de hoogste graad.

$$f(p) = a_4p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0$$

$$\psi(p) = \frac{m\,(p)}{n\,(p)} = \frac{a_4p^4 + a_2p^2 + a_0}{a_3p^3 + a_1p}$$

Als de hoogste macht van p oneven is, heeft de noemer de hoogste graad.

$$f(p) = a_5 p^5 + a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0$$

$$\psi(p) = \frac{m\ (p)}{n\ (p)} = \frac{a_4 p^4 + a_2 p^2 + a_0}{a_5 p^5 + a_3 p^3 + a_1 p} \text{ of } \psi^{-1}\ (p) = \frac{a_5 p^5 + a_3 p^3 + a_1 p}{a_4 p^4 + a_2 p^2 + a_0}$$

Men kan bewijzen dat:

1) Polen en nulpunten van $\psi(p)$, resp. $\psi^{-1}(p)$ enkelvoudig zijn en op de imaginaire as liggen.

2) $\frac{1}{j}\frac{d\psi}{d\omega}$ positief is, dus polen en nulpunten alterneren (theorema van Foster).

De formules voor $\psi(p)$ voor n = even en $\psi^{-1}(p)$ voor n =

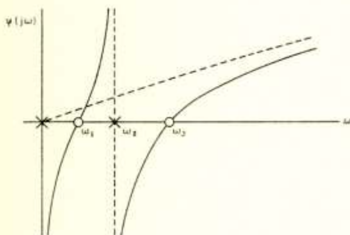


fig. 9
Voorstelling van een even ψ-functie.

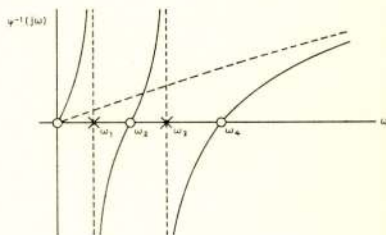


fig 10
ψ^{-1}-functie van een polynoom van de 5e graad.

oneven kunnen uitgedrukt worden in nulpunten en polen. Voor een even graad, bijvoorbeeld $n = 4$ (fig. 9) is:

$$f(p) = a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0, \text{ dus}$$

$$\psi(p) = \frac{a_4 p^4 + a_2 p^2 + a_0}{a_3 p^3 + a_1 p}$$

Voor $p = j\omega$ komen er wortels van teller en noemer voor van het type $\pm j\omega_k$. Deze leveren een factor $(p - j\omega_k)(p + j\omega_k) = p_2 + \omega_k^2$. Dus is:

$$\psi(p) = \frac{a_4}{a_3} \cdot \frac{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_3^2)}{p(p^2 + \omega_2^2)} \qquad \omega_3 > \omega_2 > \omega_1$$

Er is een pool voor $p = 0$, dan komt er een geconjugeerd stel

nulpunten $p = \pm j\omega_1$, daarna een stel polen $p = \pm j\omega_2$ en vervolgens een stel nulpunten $p = \pm j\omega_3$.
Voor een ψ functie, die afgeleid is van een H.P. met een oneven graad, verloopt het proces analoog. Bijvoorbeeld voor $n = 5$ (fig. 10)

$$f(p) = a_5 p^5 + a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0$$

$$\psi^{-1}(p) = \frac{a_5}{a_4} \cdot \frac{\left[p^5 + p^3(\omega_2^2 + \omega_4^2) + p\,\omega_2^2\,\omega_4^2\right]}{\left[p^4 + p^2(\omega_1^2 + \omega_3^2) + \omega_1^2\,\omega_3^2\right]}$$

De functie $\psi(p)$, respectievelijk $\psi^{-1}(p)$ kan ontwikkeld worden in een kettingbreuk met reële positieve coëfficiënten. Het aantal termen van de kettingbreuk is gelijk aan de graad van $f(p)$. Zijn de coëfficiënten niet positief of wordt de ontwikkeling in een kettingbreuk afgebroken, dan is het polynoom, waarvan de $\psi(p)$ of $\psi^{-1}(p)$ afkomstig is, geen hurwitzpolynoom.

4. Netwerkfuncties

De volgende functies zijn van belang bij het onderzoek van schakelingen:

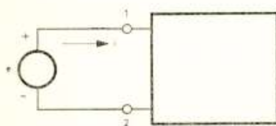


fig. 11
Ingangsimpedantie van een tweepool aangesloten op een spanningsbron.

De *ingangsimpedantie* (driving-point impedance) is de verhouding tussen de opgedrukte spanning en de stroom, die aan de ingang van een tweepool optreedt als functie van p of $j\omega$ (fig. 11).

$$z_i = z_{12} = \frac{e}{i} = f(p) \text{ of } \overline{Z}_{12} = \frac{\overline{E}}{\overline{I}} = f(j\omega)$$

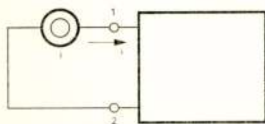


fig. 12
Ingangsadmittantie van een tweepool aangesloten op een stroombron.

De *ingangsadmittantie* (driving-point admittance) is de verhouding tussen de stroom, die aan de ingang van de tweepool optreedt en de klemspanning als functie van p of $j\omega$ (fig. 12).

$$y_{12} = \frac{i}{u_{12}} = f(p) \text{ of } \overline{Y}_{12} = \frac{\overline{I}}{\overline{U}_{12}} = f(j\omega)$$

De admittantie is het reciproke van de impedantie. De term *immittantie* kan zowel voor impedantie als voor admittantie gebruikt worden.

De polen en nulpunten van passieve ingangsimmittanties.

Als een passief netwerk aangesloten wordt op een spanningsbron, geldt de betrekking:

$$e_0 = iz_i \text{ of } i = e_0 y_i = e_0 \frac{f_2\,(p)}{f_1\,(p)}$$

$z_i = \frac{f_1\,(p)}{f_2\,(p)}$ is een gebroken rationele functie, nl. de verhouding van twee polynomen. Indien een passief netwerk aangesloten wordt op een stroombron, geldt:

$$i_0 = uy_i \text{ of } u = i_0 z_i = i_0 \frac{f_1\,(p)}{f_2\,(p)}$$

Het reële deel van een passieve ingangsimmittantie kan voor geen enkele waarde van $p = j\omega$ negatief zijn. Een immittantie is een *positief reële functie*. Dit betekent, dat het argument van een immittantie nooit groter kan zijn dan $\pm \frac{\pi}{2}$. Bij hoge waarde van ω levert elk nulpunt een bijdrage van $\frac{\pi}{2}$ en elke pool een bijdrage van $-\frac{\pi}{2}$.

Hieruit volgt:

1. *Het aantal nulpunten van een passieve ingangsimmittantie kan ten hoogste één verschillen van het aantal polen.*
2. *Nulpunten en polen van de ingangsimmittantie van een passieve tweepool liggen in de linkerhelft van het complexe vlak.*
3. *Nulpunten en polen in linkerhalfvlak mogen meervoudig zijn.*
4. *Nulpunten en polen van de ingangsimmittantie op de imaginaire as moeten enkelvoudig zijn.*

De *overdrachtsimpedantie van een vierpool* (transfer impedance) is de verhouding van de spanning over een vastgestelde belastingsimpedantie en de ingangsstroom. Netwerk inclusief admittantie van nortongenerator (geleidbaarheid) (fig. 13 en 14).

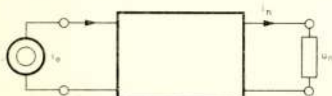


fig. 13
Overdrachtsimpedantie van een vierpool met een stroombron aan de linker klemmen en belast met een impedantie aan de rechter klemmen.

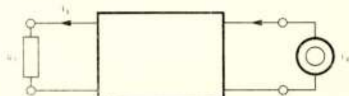


fig. 14
Overdrachtsimpedantie van een vierpool met de rechter klemmen aangesloten aan een stroombron en aan de linker klemmen belast met een impedantie.

De spanning over de belastingsimpedantie is:

$$u_n = i_0 f_1(p),$$

waarbij $f_1(p)$ gevormd wordt door de verhouding van twee polynomen en de dimensie heeft van een impedantie.

$$\frac{u_n}{i_0} = f_1(p) = z_T \text{ of } z_{T1n}.$$

Overdrachtsadmittantie van een vierpool

De stroom door de belastingsimpedantie is: $i_n = e_0 F_2(p)$; $F_2(p)$ wordt gevormd door de verhouding van twee polynomen en heeft de dimensie van een admittantie.

Netwerk inclusief weerstand van generator.

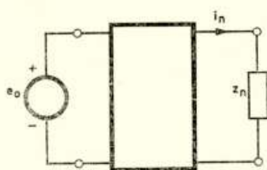


fig. 15
Overdrachtsimpedantie van een vierpool, die aan de linker klemmen belast is met een spanningsbron en waarvan de rechter klemmen afgesloten zijn met een impedantie.

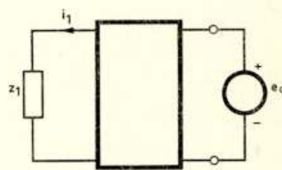


fig. 16
Overdrachtsimpedantie van een vierpool, waarvan de linker klemmen zijn aangesloten aan een spanningsbron en de rechter klemmen belast zijn met een impedantie.

$$\frac{i_n}{e_0} = f_2(p) = y_{T1n} = y_T.$$

Hiermede wordt dus i_n verkregen als functie van de gegeven opgedrukte spanning.

De overdrachtsverhouding van spanningen is de verhouding van de spanning aan de belasting en de opgedrukte spanning. Men kan ook spreken van de spanningstransmissie en hiervoor het lettersymbool T_u invoeren.

Als functie van p zijn de spanningsoverdrachtsverhoudingen (fig. 17)

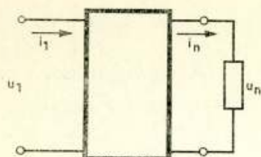


fig. 17
Overdrachtsverhouding van de spanning aan de belastingzijde en de klemspanning aan de ingangszijde.

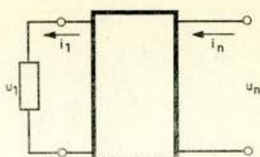


fig. 18
Overdrachtsverhouding van de spanning over de belasting en de opgedrukte spanning aan de rechter klemmen.

$T_{u1n} = \frac{u_n}{u_1}$, respectievelijk $T_{un1} = \frac{u_1}{u_n}$ als de richting van het vermogen van rechts naar links is (fig. 18). Neem aan dat de vierpool is aangesloten op een e.m.k. e_0. De spanningsoverdrachtsverhouding is dan:

$$T_u = \frac{u_n}{e_0} = \frac{i_n z_n}{e_0} = y_T z_n = \frac{y_T}{y_n}.$$

Als functie van $j\omega$ noteren wij: $\frac{\overline{U}_n}{\overline{U}_1}$ respectievelijk $\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_n}$.

De overdrachtsverhouding van stromen is de verhouding van de stroom door de belasting en de ingangsstroom.

$$T_{i1n} = \frac{i_n}{i_1} \text{ resp. } T_{in1} = \frac{i_1}{i_n} \text{ als functie van } p$$

$$\frac{\overline{I}_n}{\overline{I}_1} \text{ resp. } \frac{\overline{I}_1}{\overline{I}_n} \text{ als functie van } j\omega$$

Bij aansluiting op een stroombron geldt:

$$T_i = \frac{i_n}{i_0} = \frac{u_n y_n}{i_0} = z_T y_n = \frac{z_T}{z_n}$$

De overdrachtsexponent van de spanningen wordt gedefinieerd door de overdrachtsverhouding van de spanningen gelijk te stellen aan een ε-macht met een negatieve exponent.

$$T_u = \frac{\bar{u}_n}{\bar{u}_1} = \frac{\hat{u}_n\, \varepsilon^{(pt + j\beta_n)}}{\hat{u}_1\, \varepsilon^{(pt + j\beta_1)}} = \frac{U_n}{U_1}\, \varepsilon^{-j(\beta_1 - \beta_n)} = \varepsilon^{-\Theta}$$

N.B. In verband met de uitwerking wordt hier de notatie $\frac{\bar{u}_n}{\bar{u}_1}$ gebruikt.

$$\Theta = a + jb$$

$$\frac{\hat{u}_n}{\hat{u}_1} = \frac{U_n}{U_1} = \varepsilon^{-a} \text{ of } U_n = U_1\, \varepsilon^{-a}$$

De keuze van het minteken is gedaan omdat dan het positief reële deel van het complexe argument Θ, de dempingsexponent genoemd kan worden.
Bij richtings-onsymmetrie is de dempingsexponent voor een spanningsoverdracht van links naar rechts ongelijk aan die bij de overdracht van rechts naar links.

Nulpunten en polen van overdrachtsfuncties van passieve vierpolen.

Als type van een overdrachtsfunctie nemen wij:

$$\frac{u_n}{e_0} = H.\frac{(p - z_1)\,(p - z_2)\,\ldots\ldots\,(p - z_m)}{(p - p_1)\,(p - p_2)\,\ldots\ldots\,(p - p_n)}$$

Hierin zijn z_1 t/m z_m de nulpunten en p_1 t/m p_n de polen. In de eerste plaats zal nu aangetoond worden, dat het aantal nulpunten van een overdrachtsfunctie, die betrekking heeft op een passief netwerk, niet groter kan zijn dan het aantal polen. Neem aan, dat $m > n$, dan kan $\frac{u_n}{e_0}$ ontwikkeld worden in een reeks met aflopende machten van p en in partiële breuken.

$$\frac{u_n}{e_0} = \ldots.\; B_2 p^2 + B_1 p + A_0 + \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \ldots\ldots$$

Bij zeer hoge waarden van ω, met $p = j\omega$, zou de eindspanning u_n onbeperkt toenemen met een eindige opgedrukte spanning e_0. Dit is bij een passief netwerk niet mogelijk, dus moeten B_1, B_2, enz. gelijk aan nul zijn.

1. *Het aantal nulpunten van een overdrachtsfunctie van een passief netwerk kan ten hoogste gelijk zijn aan het aantal polen.*

Algemeen stellen wij nu $m = n$, dan is:

$$\frac{u_n}{e_0} = H.\frac{(p - z_1)\,(p - z_2)\,\ldots\ldots\,(p - z_n)}{(p - p_1)\,(p - p_2)\,\ldots\ldots\,(p - p_n)}$$

2. Uit stabiliteitsoverwegingen volgt, dat *het reële deel van de polen negatief moet zijn*. De reële delen van de polen moeten negatief zijn, omdat er anders een schakelverschijnsel zou ontstaan met een ε-macht met positieve exponent. Als het reële deel van een stel toegevoegd complexe polen nul zou zijn, geldt:

$$p_1 = j\omega_1 \qquad p_2 = -\,j\omega_1$$

In de noemer komt dan een factor: $(p - p_1)\,(p - p_2) = p^2 + \omega_1^2$
Indien de opgedrukte spanning een radiaalfrequentie ω_1 heeft, zou de noemer nul worden en de uitgangsspanning u_n oneindig groot. Dit is met een passief netwerk, dat samengesteld is uit elementen met dissipatie niet mogelijk, dus:

3. *Op de imaginaire as mogen geen polen voorkomen, als de elementen verliezen hebben.*

Uit het voorafgaande blijkt, dat er voor de nulpunten alleen een voorwaarde is voor het aantal. De nulpunten van een overdrachtsfunctie kunnen dus zowel in de linker- als in de rechterhelft van het complexe vlak voorkomen en mogen meervoudig zijn. Als er toegevoegde nulpunten op de imaginaire as voorkomen heeft de teller een factor $p^2 + \omega_1^2$, die 0 wordt als de opgedrukte spanning een radiaalfrequentie ω_1 bezit. Dit betekent, dat voor een eindige waarde van ω de eindspanning $u_n = 0$ is. Voor deze frequentie treedt dan een oneindig grote demping op, wat alleen mogelijk is met verliesvrije elementen.

Vervolgens zal nagegaan worden wat het effect is als er nulpunten voorkomen in het rechterdeel van het complexe vlak. Neem aan, dat een aantal van de nulpunten een positief reëel deel heeft. $z_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ en $z_2 = \sigma_1 - j\omega_1$ zijn twee toegevoegd complexe nulpunten met positief reëel deel. Er wordt nu een breuk afgesplitst, waarvan de teller bestaat uit de factoren met de positieve waarden van z_1 en z_2 en de noemer uit overeenkomstige factoren, maar met de negatieve waarden van z_1 en z_2.

$$\frac{u_n}{e_0} = H.\frac{(p + \sigma_1 + j\omega_1)\,(p + \sigma_1 - j\omega_1)\,(p - z_m)}{\text{noemer}} \cdot \frac{(p - \sigma_1 - j\omega_1)\,(p - \sigma_1 + j\omega_1)}{(p + \sigma_1 + j\omega_1)\,(p + \sigma_1 - j\omega_1)}$$

De waarde van $\frac{u_n}{e_0}$ is, blijkens bovenstaand voorbeeld, niet veranderd.

De afgesplitste breuk met nulpunten in de rechterhelft en polen in de linkerhelft is een functie met de modulus één en een steeds afnemend argument. Door afsplitsing van $f_2(p)$ hebben wij dus nu:

$$\frac{u_n}{e_0} = f_1(p) \cdot f_2(p)$$

Door hetzelfde te doen voor alle nulpunten met een positief reëel deel wordt dus voor $f_1(p)$ een functie verkregen, die bij een bepaalde dempingskarakteristiek een minimum fazedraaiing heeft. Het is dus mogelijk een willekeurige overdrachtsfunctie om te vormen in een functie met minimum fazedraaiing.

In het voorafgaande is afgeleid, dat er overdrachtsfuncties bestaan met een willekeurige fazedraaiing en met een minimum fazedraaiing. Het is van belang om na te gaan welke uitvoeringsvormen van netwerken overdrachtsfuncties van de ene of de andere soort opleveren.

Laddernetwerken

Wij beschouwen laddernetwerken waarvan de samenstellende immittanties bestaan uit zelfinductie, capaciteit, serieschakeling of parallelschakeling van L en C e.d., eventueel met verliezen. Een overdrachtsfunctie heeft dan een teller, die het product is van een aantal immittanties en een noemer, die de som is van dergelijke producten. Na verdrijving van grootheden van het type $\frac{1}{pC}, \frac{1}{pL}, \frac{1}{(p^2 LC + 1)}$ enz. ontstaat als teller een polynoom in p.

Bijv. $y_0 y_2 y_4 = G_0 \frac{1}{pL_2} \cdot \frac{1}{pL_4}$ wordt G_0, nadat teller en noemer vermenigvuldigd zijn met $p^2 L_2 L_4$, of met verliezen:

$$G_0\left(pC_2 + \frac{1}{pL_2} + G_2\right)\left(pC_4 + \frac{1}{pL_4} + G_4\right)$$
wordt $G_0 (p^2 L_2 C_2 + pL_2 G_2 + 1)(p^2 L_4 C_4 + pL_4 G_4 + 1)$ enz.

Een teller, die op deze manier is ontstaan is een hurwitz-polynoom. De coëfficiënten van de teller worden gevormd door een product van pL, pC en R (G) of een som van dergelijke producten.

Alle termen van de coëfficiënten en dus alle coëfficiënten zijn

positief en er is géén parameter μ of s_g, waarmede een gedeelte van de termen vermenigvuldigd is, waardoor het hurwitzkarakter aangetast zou kunnen worden (verschuiving van de wortels naar het rechterhalfvlak). Men zou in dit geval kunnen zeggen, dat de coëfficiënten van de teller 'open' zijn, in tegenstelling tot een geval, waarbij de waarde van de coëfficiënten in de vorm a_k gegeven is. Aangezien de noemer een H.P. is, omdat het een passief netwerk betreft, zijn dus teller en noemer H.P.'s en heeft een overdrachtsfunctie van dergelijke *laddernetwerken* een minimale fazedraaiing.

Brugschakelingen

Overdrachtsfuncties, die geen minimumfazedraaiing hebben, komen o.a. te voorschijn bij brugschakelingen.

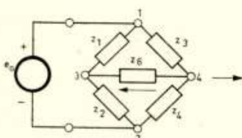


fig. 19
Brugschakeling als voorbeeld van een functie, die geen minimum fazedraaiing heeft.

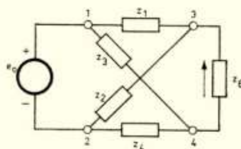


fig. 20
Dezelfde schakeling anders getekend.

De spanningsverhouding $\frac{u_6}{e_0}$ (fig. 19, 20) is:

$$\frac{u_6}{e_0} = \frac{(z_1 z_4 - z_2 z_3)\, z_6}{z_1 z_2\, (z_3 + z_4) + z_3 z_4\, (z_1 + z_2) + z_6\, (z_1 + z_2)\, (z_3 + z_4)}$$

Ook hier zijn de immittanties van de takken weer samengesteld uit L, C en R, zodat elk van de producten $z_1 z_4$ en $z_2 z_3$ H.P. opleveren. Er treedt nu echter in de teller een minteken op, zodat de teller geen hurwitzpolynoom behoeft te zijn. Van grote practische betekenis zijn brugschakelingen, waarbij de overliggende takken gelijk zijn, dus $z_1 = z_4$ en $z_2 = z_3$, maar z_1 en z_2 verschillen. Bovendien is het mogelijk, door voor z_1 en z_2 reciproke impedanties te kiezen, de ingangsimpedantie van de brug gelijk te maken aan de afsluitweerstand R_6.

De ingangsstroom is:

$$i_o = \frac{e_o\left[(z_1 + z_3)(z_2 + z_4) + R_6 (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)\right]}{z_1 z_2 (z_3 + z_4) + z_3 z_4 (z_1 + z_2) + R_6 (z_1 + z_2)(z_3 + z_4)}$$

Als nu $z_1 = z_4$ en $z_2 = z_3$ is de ingangsimpedantie:

$$z_i = \frac{2\, z_1 z_2 + R_6 (z_1 + z_2)}{2\, R_6 + z_1 + z_2}$$

en met $z_1 z_2 = R_6^2$ is $z_i = R_6$. De spanningsverhouding is dan:

$$\frac{u_6}{e_o} = \frac{(z_1^2 - z_2^2) R_6}{\left[2\, R_6^2 + R_6 (z_1 + z_2)\right](z_1 + z_2)} = \frac{z_1 - z_2}{2\, R_6 + z_1 + z_2}$$

Het blijkt nu, dat de modulus van $\frac{u_6}{e_o}$ voor $p = j\omega$, constant is en het argument verandert als functie van ω. Het eerste type van een fazebrug wordt gevormd door takken met L, resp. C (fig. 21, 22).

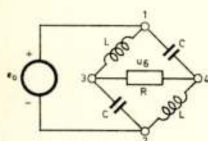


fig. 21
Voorbeeld van een fazedraaiend netwerk.

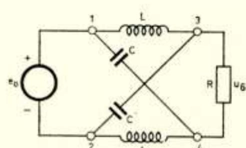


fig. 22
Hetzelfde fazedraaiend netwerk van fig. 21 anders getekend.

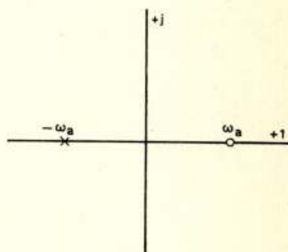


fig. 23
Nulpunt en pool van een LC-brugschakeling.

$$z_1 = pL \qquad z_2 = \frac{1}{pC} \qquad z_1 z_2 = \frac{L}{C} = R^2 \qquad \omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{\overline{U}_6}{\overline{E}_o} = \frac{(j\omega - \omega_a)}{(j\omega + \omega_a)} = 1 \,.\, \varepsilon^{-j2\Theta} \qquad tg\, \Theta = \frac{\omega}{\omega_a} = \omega \sqrt{LC}$$

De overdrachtsfunctie heeft een nulpunt in het rechterhalfvlak $z = \omega_a$ en een pool in het linkerhalfvlak $p = -\omega_a$ (fig. 23).
De uitdrukking $\frac{p - \omega_a}{p + \omega_a}$ of $\frac{p - \sigma}{p + \sigma}$ herkennen wij als een afgesplitste breuk.

In de figuren 24 en 25 is verondersteld, dat de vierpool 1.2 - 3.4 een netwerk is met minimumfazedraaiing. Door toevoeging

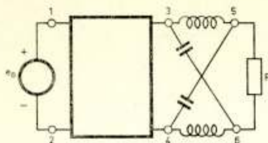


fig. 24
Een netwerk met minimum fazedraaiing in cascade met een fazedraaiend netwerk.

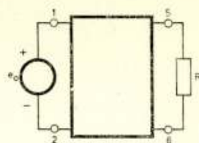


fig. 25
Netwerk met minimum fazedraaiing zonder fazecorrectie.

van brugschakeling 3.4 - 5.6 heeft het netwerk niet meer de eigenschap van minimum fazedraaiing.

Het tweede type van fazebrug wordt gevormd door een parallel- resp. serieschakeling van L en C.

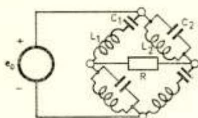


fig. 26
Fazebrug met takken bestaande uit serie- en parallelschakelingen van L en C.

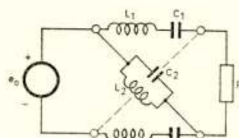


fig. 27
Hetzelfde fazedraaiend netwerk anders getekend.

$$z_1 = pL_1 + \frac{1}{pC_1} = \frac{p^2 L_1 C_1 + 1}{pC_1}$$

$$z_2 = \frac{pL_2}{p^2 L_2 C_2 + 1}$$

De voorwaarde voor z_1 en z_2 is dat $z_1 z_2 = R^2$

$$\frac{\overline{U}_6}{\overline{E}_0} = \frac{1 - \omega^2 L_2 C_2 - j\omega \sqrt{L_2 C_1}}{1 - \omega^2 L_2 C_2 + j\omega \sqrt{L_2 C_1}} = 1 . \varepsilon^{-j2\Theta}$$

$$tg\ \Theta = \frac{\omega \sqrt{L_2 C_1}}{1 - \omega^2 L_2 C_2} = \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right)} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_1}}$$

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$$

Een of meer van deze typen van brugsecties, afgesloten met een weerstand R, kunnen achter een netwerk met minimum fazedraaiing geschakeld worden. De modulus van de spanningsverhouding verandert niet, maar de faze verandert wel, zodat deze schakeling als *fazecorrectie* gebruikt kan worden, als de faze-exponent van het oorspronkelijke netwerk, bijv. een laddernetwerk, niet voldoet aan de gestelde eisen voor de faze-exponent.

Overdrachtsfuncties met minimum fazedraaiing

$$\frac{u_n}{e_0} = \varepsilon^{-\Theta} = H.\ \frac{(p - z_1)\ \ldots\ldots\ (p - z_n)}{(p - p_1)\ \ldots\ldots\ (p - p_n)} \qquad \Theta = a + jb$$

De teller heeft ten hoogste de graad van de noemer. a is een even functie van ω en b een oneven functie van ω. Bode heeft een aantal betrekkingen afgeleid tussen reëel en imaginair deel van de dempingsexponent door de waarde van een kringintegraal te berekenen van $-j\infty$ tot $+j\infty$ en terug in het rechterhalfvlak over een halve cirkel met zeer grote straal.

$$\int_0^\infty (a - A_\infty)\, d\omega = -\frac{\pi}{2} B_\infty \qquad \int_0^\infty \frac{(a - A_0)}{\omega^2}\, d\omega = \frac{\pi}{2} B_0$$

Het verband tussen demping en faze-exponent als de dempingsexponent in een bepaald frequentiegebied gegeven is en de faze-exponent in een ander frequentiegebied.

$\omega_c < \omega_0$

$$\frac{2\,\omega_c}{\pi}\int_0^{\omega_0} \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \cdot \frac{d\omega}{(\omega^2 - \omega_c^2)} + \frac{2\,\omega_c}{\pi}\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{b}{\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}} \cdot \frac{d\omega}{(\omega^2 - \omega_c^2)} = \frac{b_c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}}}$$

$\omega_c > \omega_0$

$$\frac{2\,\omega_c}{\pi}\int_0^{\omega_0} \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \cdot \frac{d\omega}{(\omega^2 - \omega_c^2)} + \frac{2\,\omega_c}{\pi}\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{b}{\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}} \cdot \frac{d\omega}{(\omega^2 - \omega_c^2)} = -\frac{a_c}{\sqrt{\frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} - 1}}$$

Als van $\omega = 0$ tot $\omega_0 : a = a_0$ en van $\omega = \omega_0$ tot $\infty : b = k\frac{\pi}{2}$, dan is de uitkomst:

$$b = k \text{ bgsin } \frac{\omega}{\omega_0} \text{ en } a = a_0 + k \text{ area cosh } \frac{\omega}{\omega_0}$$

5. Normalisatie van de impedantie en de frequentie van netwerkfuncties

5.1. *Normalisatie van de impedantie*

De bedoeling van de normalisatie van de impedantie is een vergelijking te krijgen, waarin een bepaalde, voor de schakeling karakteristieke weerstand, bijv. de afsluitweerstand, een waarde krijgt van 1 ohm, resp. de afsluitgeleidbaarheid een waarde van 1 siemens. Komen er meer weerstanden voor in het circuit, dan komen op de plaats van de oorspronkelijke weerstands-coëfficiënten dimensieloze verhoudingsgetallen. De overige coëfficiënten veranderen van grootte en dimensie. Hierdoor wordt het rekenwerk eenvoudiger en bovendien kan het circuit, waarvan de karakteristieke weerstand een waarde heeft van 1 ohm als standaard dienen. Voor elke andere waarde van de karakteristieke weerstand kunnen de waarden van de overige elementen eenvoudig berekend worden. De algemene vorm van de maasvergelijkingen is:

$$e_1 = \left(pL_{11} + R_{11} + \frac{1}{pC_{11}}\right) i_1 - \ldots\ldots - \left(pL_{1n} + R_{1n} + \frac{1}{pC_{1n}}\right) i_n$$

$$0 = -\left(pL_{n1} + R_{n1} + \frac{1}{pC_{n1}}\right) i_1 - \ldots\ldots + \left(pL_{nn} + R_{nn} + \frac{1}{pC_{nn}}\right) i_n$$

Neem aan, dat R_{nn} de afsluitweerstand is en dat men deze wil normaliseren op 1 ohm. Alle vergelijkingen worden nu gedeeld door R_{nn}.

$$\frac{e_1}{R_{nn}} = \left(p\frac{L_{11}}{R_{nn}} + \frac{R_{11}}{R_{nn}} + \frac{1}{pC_{11}\,R_{nn}}\right) i_1 - \ldots - \left(p\frac{L_{1n}}{R_{nn}} + \frac{R_{1n}}{R_{nn}} + \frac{1}{pC_{1n}\,R_{nn}}\right) i_n$$

$$0 = -\left(p\frac{L_{n1}}{R_{nn}} + \frac{R_{n1}}{R_{nn}} + \frac{1}{pC_{n1}\,R_{nn}}\right) i_1 - \ldots + \left(p\frac{L_{nn}}{R_{nn}} + 1 + \frac{1}{pC_{nn}\,R_{nn}}\right) i_n$$

Er zijn nu nieuwe coëfficiënten gekomen met een andere dimensie. Alle *inductie-coëfficiënten* en alle *weerstanden* worden *gedeeld* door R_{nn}. Alle *capaciteiten* worden *vermenigvuldigd* met R_{nn}.

Voor de stroomvergelijkingen is het proces als volgt:

$$i_1 = \left(pC_{11} + G_{11} + \frac{1}{pL_{11}}\right) u_1 - \ldots\ldots - \left(pC_{1n} + G_{1n} + \frac{1}{pL_{1n}}\right) u_n$$

$$0 = -\left(pC_{n1} + G_{n1} + \frac{1}{pL_{n1}}\right) u_1 - \ldots\ldots + \left(pC_{nn} + G_{nn} + \frac{1}{pL_{nn}}\right) u_n$$

Hierin stelt G_{nn} de afsluitgeleidbaarheid voor. Neem aan, dat men deze wil normaliseren op 1 siemens.

$$\frac{i_1}{G_{nn}} = \left(p\frac{C_{11}}{G_{nn}} + \frac{G_{11}}{G_{nn}} + \frac{1}{pL_{11}\,G_{nn}}\right)u_1 - \ldots - \left(p\frac{C_{1n}}{G_{nn}} + \frac{G_{1n}}{G_{nn}} + \frac{1}{pL_{1n}\,G_{nn}}\right)u_n$$

$$0 = -\left(p\frac{C_{n1}}{G_{nn}} + \frac{G_{n1}}{G_{nn}} + \frac{1}{pL_{n1}\,G_{nn}}\right)u_1 - \ldots + \left(p\frac{C_{nn}}{G_{nn}} + 1 + \frac{1}{pL_{nn}\,G_{nn}}\right)u_n$$

Alle *capaciteiten* en alle *geleidbaarheden* worden *gedeeld* door G_{nn}. Alle *inductie-coëfficiënten* worden *vermenigvuldigd* met G_{nn}.

5.2 *Normalisatie van de frequentie*

Als de complexe frequentie p, of de reële frequentie ω, gedeeld worden door een constante waarde k, verandert er niets aan de weerstandstermen. Teneinde de totale impedantie onveranderd te laten, moeten de coëfficiënten van de reactantietermen met dezelfde waarde k vermenigvuldigd worden.

$$pL = \frac{p}{k}\,.\,kL \qquad\qquad \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\dfrac{\omega}{k}\,.\,kC}$$

Het ligt voor de hand een waarde voor k te kiezen met dezelfde dimensie als p. Neem $k = \omega_a$, waarbij ω_a voorlopig een willekeurige waarde heeft, groter dan 1. Alle nulpunten en polen komen nu dichter bij het assenkruis.

Bij de normalisatie van een vergelijking in lettersymbolen voert men een nieuwe veranderlijke in, $p' = \dfrac{p}{\omega_a}$. In bepaalde gevallen kan voor ω_a een waarde gekozen worden, die een physische betekenis heeft, bijv. de gedefinieerde grensfrequentie voor een laagdoorlaatband. In dat geval wordt voor de reële frequentie ω de waarde $\dfrac{\omega}{\omega_a}$ of $\dfrac{\omega}{\omega_0}$ gesubstitueerd. Voor $\omega = \omega_0$ is de waarde van de nieuwe veranderlijke 1.

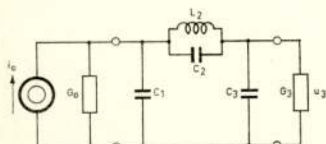


fig. 28
Prototype van een laagdoorlatendfilter.

Wij zullen nu het procédé toepassen op de overdrachtsimpedantie van de schakeling in fig. 28

Het circuit is technisch belangrijk als het prototype van een laagdoorlatendfilter met een parallelkring in de serietak. Het

zal blijken, dat de overdrachtsimpedantie in dit geval zowel nulpunten als polen heeft.

$$z_T = \frac{y_2}{y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3}$$

$$z_T = \frac{p^2 L_2 C_2 + 1}{p^3 L_2 (C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3) + p^2 L_2 \{C_1 G_3 + C_2 (G_0 + G_3) + C_3 G_0\} + \ldots\ldots + p\{L_2 G_0 G_3 + C_1 + C_3\} + G_0 + G_3}$$

Normalisatie van de formule, zodanig dat de constante van de noemer 1 wordt en de coëfficiënt van p^3 in de noemer ook gelijk wordt aan 1. $G_3 = 1$ siemens.

De coëfficiënten van de noemer worden:

$$p^3: \quad \frac{L_2(C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)}{G_0 + 1} = 1$$

$$p^2: \quad \frac{L_2 \{C_1 + C_2 (G_0 + 1) + C_3 G_0\}}{G_0 + 1} = a_2$$

$$p: \quad \frac{(L_2 G_0 + C_1 + C_3)}{G_0 + 1} = a_1$$

Als G_0 gegeven is moet er nog een vierde vergelijking zijn om de vier onbekenden L_2, C_1, C_2 en C_3 te bepalen. De coëfficiënten a_1 en a_2 zijn te berekenen als uitgegaan wordt van de gewenste plaats van de polen. Dus:

$$(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3) = p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1$$

$$p_1 = -\sigma_1 \qquad p_2 = -\sigma_2 + j\omega_2 \qquad p_3 = -\sigma_2 - j\omega_2$$

$$a_2 = \sigma_1 + 2\sigma_2 \qquad a_1 = \sigma_2^2 + \omega_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2$$

$$a_0 = 1 = \sigma_1(\sigma_2^2 + \omega_2^2)$$

Hoe men er toe komt de plaats van de polen in het complexe vlak te bepalen zal behandeld worden bij de filters. Het is voldoende om hier aan te nemen, dat a_1 en a_2 bekende getallen zijn, dan kunnen, mét een voorwaarde voor de nulpunten, de parameters berekend worden.

Manuscript ontvangen op 16 februari 1960.

Theoretische inleiding van het symposium "Filtersynthese gebaseerd op het gebruik van functies met een complexe variabele"

Deel II

door W. Th. Bähler *)

1. Bepaling van de grensfrequentie van een laagdoorlatend-filter

Fig. 1 stelt een prototype van een laagdoorlatendfilter voor, dat aangesloten is aan een thévenin-generator en afgesloten is door een weerstand R_3. Voor $\omega = 0$ is:

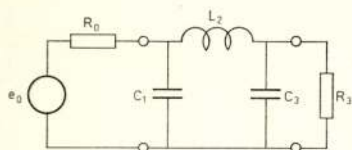


fig. 1
Prototype van een laagdoorlatend filter.

$$U_{30} = \frac{R_3 E_0}{R_0 + R_3}$$

en voor grote waarden van ω nadert $\frac{U_3}{E_0}$ tot nul.

De grensfrequentie kan, in verband met de toegestane tolerantie gedefinieerd worden voor een waarde $\omega = B$, waarvoor bijvoorbeeld geldt, dat het vermogen, dat afgegeven wordt aan R_3 de helft bedraagt van het vermogen, dat afgegeven wordt bij $\omega = 0$.

$$P_{30} = I_{30}^2 R_3 = \frac{E_0^2 R_3}{(R_0 + R_3)^2} \qquad P_3 = I_3^2 R_3 = \frac{U_3^2}{R_3}$$

$$\frac{P_3}{P_{30}} = \frac{U_3^2}{R_3} \cdot \frac{(R_0 + R_3)^2}{E_0^2 R_3} = \frac{U_3^2}{U_{30}^2} = \tfrac{1}{2}$$

Men kan bepaalde schakelingen gebruiken voor een frequentie-afhankelijke spannings- of stroomoverdracht. In verband met het frequentiegebied onderscheidt men *laagdoorlatendefilters*, *hoogdoorlatendefilters*, *banddoorlatendefilters* en *bandsperfilters*. Bij laag-

*) Technische Hogeschool Delft.

doorlatendefilters wordt het frequentiegebied van $\omega = 0$ tot $\omega = \omega_0$ doorgelaten en van $\omega = \omega_0$ tot $\omega = \infty$ gedempt. Bij hoogdoorlatendefilters ligt het doorlaatgebied van $\omega = \omega_0$ tot $\omega = \infty$. Banddoorlatendefilters laten een gebied van $\omega = \omega_1$ tot $\omega = \omega_2$ door en bandsperfilters treden dempend op in een gebied van $\omega = \omega_1$ tot $\omega = \omega_2$.

2. **Netwerktransformatie door frequentie-transformatie**

Men kan een laagdoorlatendfilter, dat bestaat uit reactieve elementen, door frequentie-transformatie omzetten in een hoog-

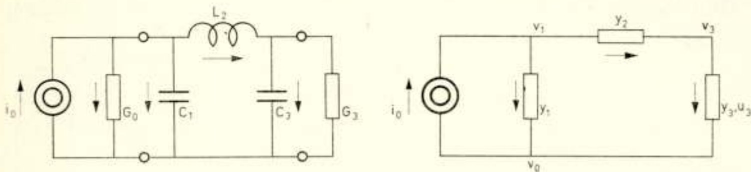


fig. 2
Netwerk als voorbeeld voor het berekenen van de overdrachtsimpedantie z_T.

doorlatendfilter of in een banddoorlatendfilter. Als voorbeeld nemen wij een laagdoorlatendfilter volgens fig. 2.

$$u_3 = i_0 \frac{y_2}{y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3} = i_0 z_T$$

$$y_1 = pC_1 + G_0 \qquad y_2 = \frac{1}{pL_2} \qquad y_3 = pC_3 + G_3$$

Hieruit volgt:

$$\frac{u_3}{i_0} = \frac{1}{p^3 L_2 C_1 C_3 + p^2 L_2 (C_1 G_3 + C_3 G_0) + p(L_2 G_0 G_3 + C_1 + C_3) + G_0 + G_3}$$

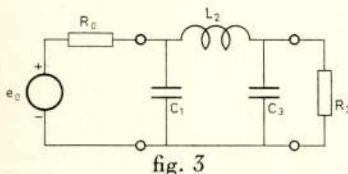


fig. 3
Hetzelfde netwerk als van fig. 2 maar nu met de nortongenerator omgezet in een théveningenerator.

Als wij de nortongenerator omzetten in een thévenin-generator (fig. 3) geldt:

$$e_0 = i_0 R_0 = \frac{i_0}{G_0}$$

De overdrachtsverhouding van de spanningen is:

$$\frac{u_3}{e_0} = \frac{G_0}{p^3 L_2 C_1 C_3 + p^2 L_2 (C_1 G_3 + C_3 G_0) + p(L_2 G_0 G_3 + C_1 + C_3) + G_0 + G_3}$$

De uitdrukking wordt nu beschouwd als functie van ω voor $p = j\omega$ (fig. 4).

$$\frac{\bar{U}_3}{\bar{E}_0} = \frac{G_0}{G_0 + G_3 - \omega^2 L_2 (C_1 G_3 + C_3 G_0) + j\omega [L_2 G_0 G_3 + C_1 + C_3 - \omega^2 L_2 C_1 C_3]}$$

Voor $\omega = 0$ is:

$$\frac{U_3}{E_0} = \frac{G_0}{G_0 + G_3} = \frac{R_3}{R_0 + R_3}$$

Voor zeer grote waarden van ω nadert $\frac{U_3}{E_0}$ tot nul. Afhankelijk van de parameters kan U_3 eerst toenemen en daarna monotoon dalen. Het circuit heeft dus het karakter van een laagdoorlatendfilter. De schakeling vormt het prototype van een CL-laddernetwerk in π-vorm.

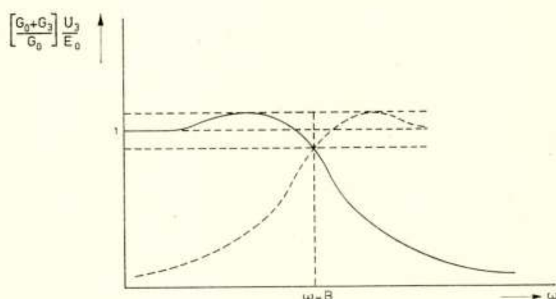


fig. 4
Bepaling van de grensfrequentie.

De grensfrequentie kan, in verband met de toegestane toleranties gedefinieerd worden voor een waarde $\omega = B$. Een andere manier om de grensfrequentie te definiëren is, dat B bepaald wordt door de betrekking:

$$\left[\frac{G_0 + G_3}{G_0}\right]^2 \frac{U_3^2}{E_0^2} = \frac{1}{2} \quad \text{of} \quad \left[\frac{G_0 + G_3}{G_0}\right] \frac{U_3}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

De waarde $\frac{1}{2}$ komt overeen met een tussenschakeldemping van 3 dB.

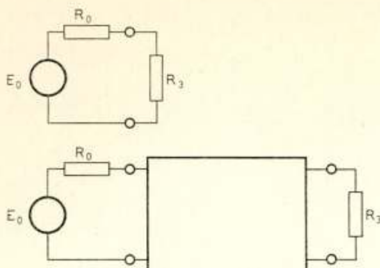


fig. 5
Het bepalen van de tussenschakeldemping.

$$P_0 = \frac{E_0^2 R_3}{(R_0 + R_3)^2}$$

Het vermogen, dat afgegeven wordt aan R_3 na tussenschakeling van het filter is (fig. 5):

$$P_3 = I_3^2 R_3 = \frac{U_3^2}{R_3}$$

De tussenschakeldemping is:

$$a_t = 10 \log \frac{P_0}{P_3} = 10 \log \frac{R_3^2}{(R_0 + R_3)^2} \cdot \frac{E_0^2}{U_3^2}$$

Als $\frac{R_3^2}{(R_0 + R_3)^2} \cdot \frac{E_0^2}{U_3^2} = \frac{G_0^2}{(G_0 + G_3)^2} \cdot \frac{E_0^2}{U_3^2} = 2$ is dus de tussenschakeldemping: $a_t = 10 \log 2 = 3\ dB$.

Het doorlatendegebied loopt per definitie van $\omega = 0$ tot $\omega = B$. Op welke wijze de parameters bepaald kunnen worden zal later nagegaan worden. Wij gaan nu het netwerk transformeren tot een hoogdoorlatend filter.

Het omzetten van een laagdoorlatendfilter door frequentie-transformatie in een hoogdoorlatendfilter.

Het hoogdoorlatendfilter moet dezelfde grensfrequentie B hebben. Voor de frequentie wordt een nieuwe variabele ω' ingevoerd.

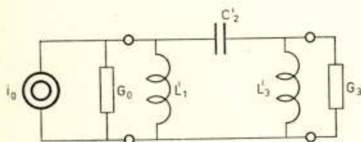


fig. 6
Hoogdoorlatend filter door frequentieomzetting verkregen uit een laagdoorlatend filter.

Stel $\omega = \frac{B^2}{\omega'}$ of $\omega\omega' = B^2$.

Een reactantie $\frac{1}{\omega C}$ wordt $\frac{\omega'}{B^2 C}$ $= \omega' L'$ met $L' = \frac{1}{B^2 C}$

Een reactantie ωL wordt $\frac{B^2 L}{\omega'}$ $= \frac{1}{\omega' C'}$; $C' = \frac{1}{B^2 L}$

Een capaciteit wordt dus getransformeerd in een zelfinductie en een zelfinductie in een capaciteit. Weerstanden en geleidbaarheden veranderen niet. Het circuit wordt als gegeven in fig. 6.

Het omzetten van een laagdoorlatendfilter door frequentie-transformatie in een banddoorlatendfilter.

Hiertoe wordt inplaats van ω een nieuwe variabele ingevoerd, die de verstemming geeft t.o.v. een te kiezen frequentie ω_m. Stel

$$\frac{\omega}{\omega_m} = \left[\frac{\omega'}{\omega_m} - \frac{\omega_m}{\omega'}\right] \text{ dus } \omega = \omega_m \left[\frac{\omega'}{\omega_m} - \frac{\omega_m}{\omega'}\right]$$

ω' is de nieuwe veranderlijke en ω_m is de frequentie ten opzichte waarvan de verstemming plaats vindt.

Als $\dfrac{\omega'}{\omega_m} = 1$ is $\dfrac{\omega}{\omega_m} = 0$, d.w.z. dat voor het laagdoorlatendfilter, waarvan wij uitgaan, de radiaalfrequentie nul is.

$$\frac{\omega'}{\omega_m} > 1 \text{ correspondeert met } \frac{\omega}{\omega_m} > 0$$

$$\frac{\omega'}{\omega_m} < 1 \text{ correspondeert met } \frac{\omega}{\omega_m} < 0$$

$\omega = +B$ is de grensfrequentie voor het laagdoorlatendfilter en $\omega = -B$ is het spiegelbeeld van de grensfrequentie voor negatieve waarden van ω.

Voor $\omega = B$ is $\dfrac{B}{\omega_m} = \left[\dfrac{\omega'}{\omega_m} - \dfrac{\omega_m}{\omega'}\right]$ waaruit $\dfrac{\omega'}{\omega_m}$ opgelost kan worden.

$$\frac{\omega'}{\omega_m} = \frac{B}{2\omega_m} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4\omega_m^2} + 1}.$$

Voor de spiegelbeeldfrequentie $-B$ is:

$$\frac{\omega'}{\omega_m} = -\frac{B}{2\omega_m} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4\omega_m^2} + 1}$$

Er zijn dus vier waarden voor $\dfrac{\omega'}{\omega_m}$ als $\omega = \pm B$:

$$\text{Stel } \omega_1' = \omega_m \left[\sqrt{1 + \frac{B^2}{4\omega_m^2}} - \frac{B}{2\omega_m}\right]$$

$$\omega_2' = \omega_m \left[\sqrt{1 + \frac{B^2}{4\omega_m^2}} + \frac{B}{2\omega_m} \right]$$

$$\omega_3' = -\omega_m \left[\sqrt{1 + \frac{B^2}{4\omega_m^2}} - \frac{B}{2\omega_m} \right] = -\omega_1'$$

$$\omega_4' = -\omega_m \left[\sqrt{1 + \frac{B^2}{4\omega_m^2}} + \frac{B}{2\omega_m} \right] = -\omega_2'$$

Hieruit volgt: $\omega_1' \omega_2' = \omega_m^2$ en $\omega_2' - \omega_1' = B$

De bandbreedte is dus hetzelfde gebleven.

Het frequentiespectrum is volgens figuur 7:

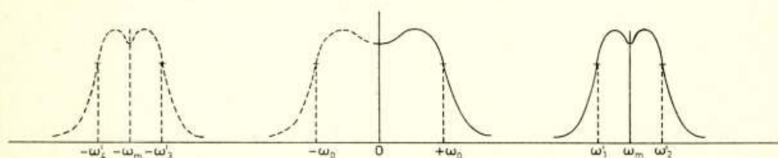


fig. 7
Frequentiespectrum dat verkregen wordt bij omzetting van een laagdoorlaten filter in een banddoorlatend filter.

Verandering van de elementen.

Een capacitieve susceptantie in het laagdoorlatendfilter wordt:

$$\omega C \rightarrow \omega_m C \left[\frac{\omega'}{\omega_m} - \frac{\omega_m}{\omega'} \right] = \omega' C - \frac{1}{\dfrac{\omega'}{\omega_m^2 C}} = \omega' C - \frac{1}{\omega' L'} \qquad L' = \frac{1}{\omega_m^2 C}$$

Een condensator C in het laagdoorlatendfilter wordt een condensator C parallel met een zelfinductie L' in het banddoorlatendfilter.
Een inductieve reactantie ωL wordt:

$$\omega_m L \left[\frac{\omega'}{\omega_m} - \frac{\omega_m}{\omega'} \right] = \omega' L - \frac{1}{\dfrac{\omega'}{\omega_m^2 L}} = \omega' L - \frac{1}{\omega' C'} \qquad C' = \frac{1}{\omega_m^2 L}$$

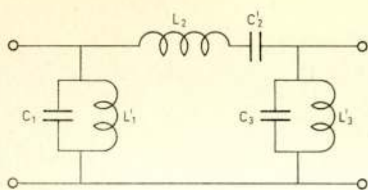


fig. 8
Elementen van het banddoorlatend filter.

Een zelfinductie L in het laagdoorlatendfilter wordt een serieschakeling van een zelfinductie L en een condensator C'.
Het reactieve deel van de schakeling wordt dus als aangegeven in fig. 8.

3. Ideale karakteristieken en benaderingsmethoden

Een netwerk met minimum fazedraaiing, waarvan de dempingsexponent een constante waarde heeft van $\omega = 0$ tot $\omega = \infty$ en waarvan de faze-exponent lineair toeneemt met de frequentie, geeft geen vervorming. Teneinde dit aan te tonen, veronderstellen wij, dat in de blijvende toestand de opgedrukte e.m.k. gegeven is in de vorm van een reeks van Fourier. Dan geldt voor de *ogenblikswaarden* van de totale e.m.k.:

$$e = \sum_{k=1}^{n} \hat{e}_k \cos (k \omega t + \psi_k)$$

De uitgangsspanning u zal ook voorgesteld kunnen worden door een reeks van Fourier. Hiervan worden de termen bepaald. Voor een harmonische met de frequentie $k\omega$ geldt voor de complexe effectieve waarden:

$$\frac{\overline{U}_k}{\overline{E}_k} = \varepsilon^{-\Theta} = \varepsilon^{-a} \, . \, \varepsilon^{-jb}$$

Na vermenigvuldiging met $\sqrt{2}\, \varepsilon^{jk\omega t}$ krijgt men complexe grootheden, die een functie van de tijd zijn. Het reële deel daarvan levert de ogenblikswaarde:

$$u_k = \hat{e}_k \, \varepsilon^{-a} \, . \cos (k \omega t - b + \psi_k)$$

Nu is gegeven, dat b evenredig is met de radiaalfrequentie. Stel $b = k \omega t_o$. t_o is een constante met de dimensie van de tijd.

Dus: $$u_k = \hat{e}_k \, \varepsilon^{-a} \cos \{ k\omega (t - t_o) + \psi_k \}$$

en de ogenblikswaarde van de totale uitgangsspanning is:

$$u = \sum_{1}^{n} \hat{e}_k \, \varepsilon^{-a} \cos \{ k\omega (t - t_o) + \psi_k \}$$

De maximale waarden van de harmonischen zijn alle met de-

zelfde factor ε^{-a} vermenigvuldigd en verder treedt voor alle harmonischen een fazeverschuiving op t.o.v. het ingangssignaal, maar deze fazeverschuiving is zo, dat de vorm van het signaal niet veranderd is. Men spreekt in dit geval van een netwerk met minimum fazedraaiing met een ideale karakteristiek.

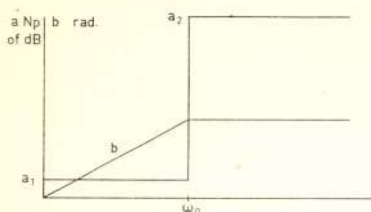


fig 9
Dempings- en fazeëxponent van de z.g. "brickwall" karakteristiek.

Het ligt nu voor de hand na te gaan of het mogelijk is deze ideale karakteristiek over te brengen op een selectief circuit, b.v. een laagdoorlatendfilter. Dan zou men voor een ideaal laagdoorlatendfilter een karakteristiek kunnen onderzoeken volgens fig. 9. De dempingsexponent heeft de waarde a_1 van $\omega = 0$ tot $\omega = \omega_0$ en springt dan op een waarde a_2 (zgn. "brickwall"). De fazeexponent groeit lineair aan met ω van $\omega = 0$ tot $\omega = \omega_0$ en blijft daarna constant. Het blijkt, dat een dergelijke karakteristiek onverenigbaar is met de eisen, waaraan a en b van een netwerk met minimum fazedraaiing moeten voldoen. De sprongfunctie van de dempingsexponent gaat dan samen met een faze-exponent als in figuur 10.

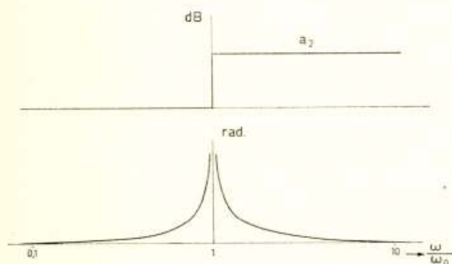


fig. 10
Sprongfunctie in de dempingsexponent en daarmede samenhangende fazeëxponent.

Hieruit blijkt, dat een sprong in de dempingsexponent niet kan samengaan met een lineair aangroeiende faze-exponent.

Als men uitgaat van een faze-exponent, die lineair aangroeit met ω tot ω_0 en daarna constant blijft, kan de daarbij behorende dempingsexponent berekend worden (figuur 11).

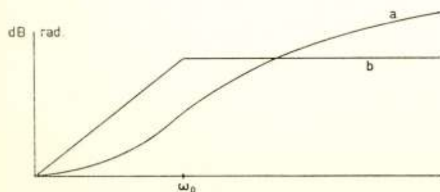


fig. 11

Tenslotte is bekend, (fig. 12) wat de faze- resp. dempingsexponent worden als gegeven is:

$$a = a_0 \quad \text{voor} \quad \omega < \omega_0$$

$$b = k\,\frac{\pi}{2} \quad \text{voor} \quad \omega > \omega_0$$

De gestelde karakteristiek mag dus niet als "ideaal" gesteld worden, omdat de daarin voorkomende eisen voor a en b onverenigbaar zijn. Toch wordt dit simpel verband tussen a en b gebruikt om enig inzicht te krijgen bij schakelverschijnselen, omdat het rekenwerk dan eenvoudig blijft.

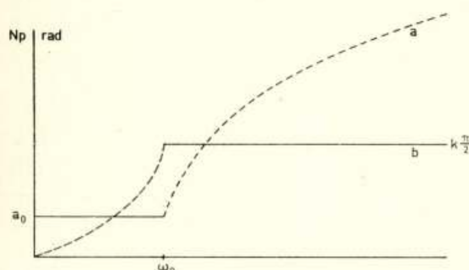


fig. 12

Bij het ontwerpen van filters zal men uitgaan van een voorgeschreven dempingskarakteristiek en de daarbij passende faze-exponent aanvaarden óf men gaat uit van een voorgeschreven fazekarakteristiek en aanvaardt de daarbij passende dempingsexponent. Het hangt af van de toepassing welke vervorming het zwaarste weegt, dempingsvervorming (amplitudevervorming) of fazevervorming.

4. Methoden voor het berekenen van de parameters om een voorgeschreven dempingskarakteristiek te benaderen

Indien het in een bepaald geval nodig is, dat de dempingsexponent of wat op hetzelfde neerkomt, de overdrachtsverhouding van spanningen of stromen, zoveel mogelijk constant is in het doorlaatgebied, kunnen er verschillende methoden toegepast worden.

De methode van Butterworth (maximally flat approximation) bestaat hieruit, dat de overdrachtsverhouding zoveel mogelijk constant blijft tot een aangewezen frequentie en daarna afneemt. De gezochte functie is dan monotoon als functie van frequentie.

Een andere methode van benadering is die van Tschebyschew, waarbij binnen het doorlaatgebied kleine golvingen toegelaten worden.

4.1. *Methode van Butterworth*

Gevraagd wordt een overdrachtsfunctie, waarvan de modulus, respectievelijk het kwadraat van de modulus van $\omega = 0$ tot een zekere waarde van ω zo vlak mogelijk is en daarna snel daalt. Als het filter afgesloten wordt met een weerstand, is het een aannemelijke afspraak voor de grensfrequentie $\omega_0 = B$ die waarde te nemen, waarbij het vermogen tot de helft gedaald is (figuur 13). Deze grensfrequentie $\omega_0 = B$ is dus bepaald door de waarde:

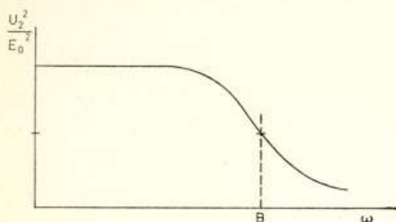


fig. 13
Monotoon verloop van het kwadraat van de modulus van spanningsoverdracht als functie van ω.

$$\frac{U_2^2}{E_0^2} = \frac{1}{2}$$

Een functie, die voldoet aan de gestelde voorwaarden is:

$$f(j\omega) = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \quad \text{of} \quad f(p) = \frac{1}{1 \pm p^{2n}}$$

Het invoeren van het teken $\pm$ voor p^{2n} zal direct duidelijk worden. De frequentie en de netwerkparameters zijn genormaliseerd en het impedantieniveau is 1 ohm of 1 siemens. De modulus van een functie van ω is een even functie en het kwadraat van de modulus is dus ook een functie van ω^2. Wij onderzoeken nu $f(p)$ voor p op de positieve imaginaire as. n kan even of oneven zijn.

n even

$$f(j\omega) = \frac{1}{1 + (-1)^n \omega^{2n}} = \frac{1}{1 + \omega^{2n}}$$

Voor de genormaliseerde frequentie $\omega = 1$ is dus $f(j\omega) = \frac{1}{2}$, $B_0 = 1$

n oneven

$$f(j\omega) = \frac{1}{1 - (-1)^n \omega^{2n}} = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \quad B_0 = 1$$

Het is nu duidelijk, dat hier een minteken nodig is. Bij een plusteken zou de noemer voor oneven n voor $\omega = 1$ de waarde 0

krijgen i.p.v. 2. Dit zou een pool op de imaginaire as geven en in strijd zijn met de voorwaarde, dat $f(j\omega)$ monotoon afneemt. De gestelde functie heeft uitsluitend polen. De polen kunnen bepaald worden door de vergelijking $1 + p^{2n}$ op te lossen als n even is en de vergelijking $1 - p^{2n}$ op te lossen als n oneven is.

n even, bijv. 4 (fig. 14)

$$p^{2n} + 1 = 0 \qquad p^{2n} = -1 = \varepsilon^{j(\pi + k2\pi)}$$

$$p_k = \varepsilon^{j(2k+1)\frac{\pi}{2n}} = \cos(2k+1)\frac{\pi}{2n} + j\sin(2k+1)\frac{\pi}{2n}$$

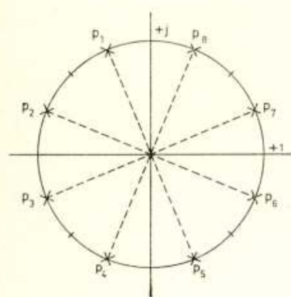


fig. 14
Ligging van de polen voor $n = 4$

$$n = 4 \qquad \frac{\pi}{2n} = \Theta = \frac{\pi}{8}$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= -\sin\Theta + j\cos\Theta \\
p_2 &= -\cos\Theta + j\sin\Theta \\
p_3 &= -\cos\Theta - j\sin\Theta \\
p_4 &= -\sin\Theta - j\cos\Theta \\
p_5 &= \sin\Theta - j\cos\Theta = -p_1 \\
p_6 &= \cos\Theta - j\sin\Theta = -p_2 \\
p_7 &= \cos\Theta + j\sin\Theta = -p_3 \\
p_8 &= \sin\Theta + j\cos\Theta = -p_4
\end{aligned}$$

n oneven, bijv. 3 (fig. 15)

$$p^{2n} - 1 = 0 \qquad p^{2n} = \varepsilon^{jk2\pi}$$

$$p_k = \varepsilon^{j2k\frac{\pi}{2n}} = \cos 2k\frac{\pi}{2n} + j\sin 2k\frac{\pi}{2n}$$

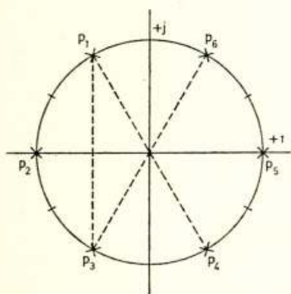


fig. 15
Ligging van de polen voor $n = 3$

Stel $\frac{\pi}{2n} = \Theta = \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned}
p_1 &= -\cos 2\Theta + j\sin 2\Theta \\
p_2 &= -1 \\
p_3 &= -\cos 2\Theta - j\sin 2\Theta \\
p_4 &= \cos 2\Theta - j\sin 2\Theta = -p_1 \\
p_5 &= +1 = -p_2 \\
p_6 &= \cos 2\Theta + j\sin 2\Theta = -p_3
\end{aligned}$$

De polen voor n even en n oneven vertonen radiale symmetrie Voor n oneven is er een reële pool in de linkerhelft en in de rechterhelft van het complexe vlak. Als n even is komen er alleen toegevoegd complexe polen voor.

Er is uitgegaan van de veronderstelling, dat $f(p)$ het kwadraat is van de modulus van een overdrachtsverhouding. Het is nu de vraag wat de oorspronkelijke functie is. Noem deze $f_1(p)$. De polen moeten in de linkerhelft liggen omdat $f_1(p)$ betrekking heeft op een passief netwerk. $f(p)$ vertoont radiale symmetrie van de polen. Het kwadraat van de modulus van $f_1(p)$ voor $p = j\omega$ kan verkregen worden door vermenigvuldiging met $f_1(-p)$, en vervolgens te substitueren $p = j\omega$.
$f_1(p) \cdot f_1(-p)$ is dus een even functie in p, die voor $p = j\omega$ het kwadraat van de modulus van $f_1(j\omega)$ geeft. De functie, waarvan het kwadraad van de modulus de vergelijking $\frac{1}{1 \pm p^{2n}}$ oplevert, wordt dus gevormd door de polen in de linkerhelft van het complexe vlak. Voor $n = 4$ is dus:

$$f_1(p) = \frac{1}{(p-p_1)\,(p-p_4)\,(p-p_2)\,(p-p_3)}$$

$$= \frac{1}{(p^2+2p\cos\Theta+1)\,(p^2+2p\sin\Theta+1)}$$

$$f_1(p) = \frac{1}{p^4+p^3\,2(\sin\Theta+\cos\Theta)+p^2\,2(1+\sin 2\Theta)+p\,2(\sin\Theta+\cos\Theta)+1}$$

In dit geval is:

$$\Theta = \frac{\pi}{8} \qquad \cos\Theta = 0{,}9239$$
$$\sin\Theta = 0{,}3827$$
$$\sin 2\Theta = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$f_1(p) = \frac{1}{p^4 + p^3\times 2{,}6132 + p^2\times 3{,}4142 + p\times 2{,}6132 + 1}$$

Als tweede voorbeeld nemen wij $n = 3$.

$$f_1(p) = \frac{1}{(p-p_2)\,(p-p_1)\,(p-p_3)} = \frac{1}{(p+1)\,(p^2+p\;2\cos 2\Theta+1)} =$$

$$= \frac{1}{p^3 + p^2(1+2\cos 2\Theta) + p(1+2\cos 2\Theta) + 1}$$

$$\Theta = \frac{\pi}{6} \qquad \cos 2\Theta = \tfrac{1}{2}$$

$$f_1(p) = \frac{1}{p^3+2p^2+2p+1}$$

De volgende stap is netwerken te kiezen, die uitsluitend polen hebben. Hieraan voldoet o.a. een reactantie-laddernetwerk, dat aangesloten is tussen een stroombron met parallel een geleidbaarheid of een spanningsbron met een weerstand in serie en een belasting gevormd door een geleidbaarheid of een weerstand. Het reactantie-netwerk bestaat uit een cascadeschakeling van parallel capaciteiten en serie-zelfinducties (fig. 16).

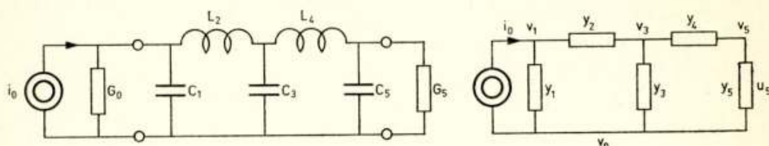


fig. 16

Reactantie-laddernetwerk dat aangesloten is aan een nortongenerator en afgesloten met een geleidbaarheid. Het reactantie-netwerk begint met een shunt-tak.

$$u_5 = i_o f_1(p) = i_o z_T$$

De graad in p van de noemer is gelijk aan het aantal reactieve elementen en na normalisatie van frequentie en parameters wordt:

$$\frac{u_5}{e_o} = f_1(p) = \frac{H}{p^5 + a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1}$$

Een ander type van reactief netwerk wordt verkregen door te beginnen met een serie-zelfinductie (fig. 17).

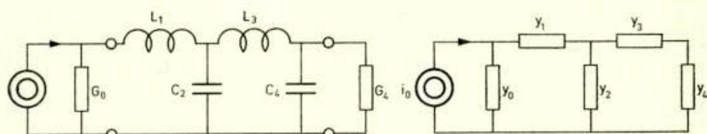


fig 17.

Reactief netwerk dat begint met een serie-zefinductie.

De formule voor z_T uitgedrukt in de admittanties is dezelfde als in het vorige geval, maar de admittantie y_o is een graad in p lager. De graad in p van de noemer is 4 en is weer gelijk aan het aantal reactieve elementen. Na normalisatie van frequentie en parameters wordt:

$$\frac{u_5}{i_o} = z_T = f_1(p) = \frac{H}{p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1}$$

Het duale netwerk van (fig. 16) is:

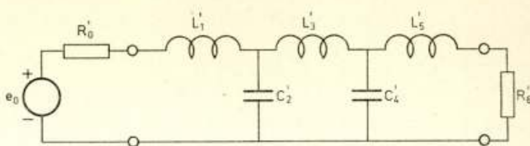


fig. 18

Het duale netwerk van (fig. 17) is:

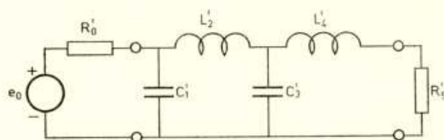


fig. 19

Het uitgangspunt voor de dimensionering is het bepalen van de waarde van n, dus het aantal reactieve elementen. Voor $\omega = 1$ is $1 + \omega^{2n} = 2$.

Als $\omega = \omega_c > 1$, kan de eis gesteld worden dat:

$$1 + \omega_c^{2n} \geqq A^2 \qquad A^2 > 2$$

Hieruit volgt:

$$n \geqq \frac{\log (A^2 - 1)}{2 \log \omega_c}$$

Voor n wordt het eerste gehele getal gekozen, dat aan deze voorwaarde voldoet. Daarmede is dus het nodige aantal reactieve elementen van de gewenste schakeling bekend.

De parameters van het genormaliseerde netwerk moeten nu zo berekend worden, dat de polen in de linkerhelft van het complexe vlak op een halve cirkel liggen met straal één. Dit is in tabelvorm gebracht door L. Weinberg: "Network design by use of modern synthesis techniques and tables", Hughes Aircraft Company, April 1956. Een verdere publikatie geeft tabellen voor netwerken, waarbij verliezen optreden in spoelen en condensatoren. L. Weinberg: "Exact ladder network design using low-Q coils", Proceedings of the I.R.E. 1958, 739 e.v.

4.2. *Benaderingsmethode met toepassing van polynomen van Tschebyschew* *

Hierbij wordt gebruik gemaakt van polynomen, die ontstaan door de ontwikkeling van cos $n\varphi$ in cos φ. Stel cos $\varphi = \omega$, dan geldt voor waarden van ω tussen -1 en $+1$:

$$T_1 = \cos \varphi = \omega \qquad \varphi = bg \cos \omega$$
$$T_2 = \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = 2\omega^2 - 1$$
$$T_3 = \cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi = 4\omega^3 - 3\omega$$
$$T_4 = \cos 4\varphi = 8\omega^4 - 8\omega^2 + 1$$
$$T_5 = \cos 5\varphi = 16\omega^5 - 20\omega^3 + 5\omega$$
$$T_6 = \cos 6\varphi = 32\omega^6 - 48\omega^4 + 18\omega^2 - 1$$
$$T_7 = \cos 7\varphi = 64\omega^7 - 112\omega^5 + 56\omega_3 - 7\omega$$
$$T_8 = \cos 8\varphi = 128\omega^8 - 256\omega^6 + 160\omega^4 - 32\omega^2 + 1$$

Een algemene formule kan men afleiden uit:

$$T_{n+1} = \cos(n+1)\varphi = \cos n\varphi \cos\varphi - \sin n\varphi \sin\varphi$$
$$T_{n-1} = \cos(n-1)\varphi = \cos n\varphi \cos\varphi + \sin n\varphi \sin\varphi, \text{waaruit volgt:}$$
$$T_{n+1} = T_n .\ 2\omega - T_{n-1}$$

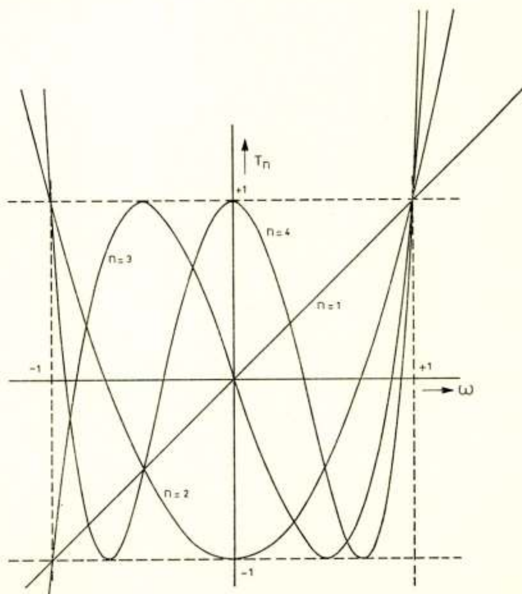


fig. 20
Functies van Tschebyschew.

*) Litteratuur: J. L. Geronimus: P. L. Tschebyschew (1821-1894) Lösung kinematischer Probleme durch Näherungsmethoden.

$T_n = \cos n\varphi = \cos n(bg\cos\omega) = T_n(\omega)$ voor reële waarden van ω tussen -1 en $+1$. Voor waarden van $|\omega| > 1$ wordt de formule: $T_n = \cosh n(\text{area}\ \cosh\ \omega) = T_n(\omega)$. Voor waarden van $|\omega| < 1$ schommelt de functie tussen $+1$ en -1 en wordt oneindig groot als $|\omega| > 1$ onbepaald aangroeit.

$$T_1 = \cosh u = \omega \qquad u = \text{area}\ \cosh\omega$$
$$T_2 = \cosh 2u = 2\cosh^2 u - 1 = 2\omega^2 - 1$$
$$T_3 = \cosh 3u = 4\cosh^3 u - 3\cosh u = 4\omega^3 - 3\omega$$

ω is de genormaliseerde frequentie. Een geschikt uitgangspunt voor de toepassing van tschebyschew-polynomen is het kwadraat van de modulus van een overdrachtsfunctie $f_1(j\omega)$, met genormaliseerde parameters en een impedantieniveau van 1 ohm, gelijk te stellen aan $\dfrac{1}{1 + h^2 T_n^2(\omega)}$.

Dus $|f_1(j\omega)|^2 = f_1(j\omega) \cdot f_1(-j\omega) = \dfrac{1}{1 + h^2 T_n^2(\omega)}$

h is een getal, dat kleiner is dan 1 en dat een maat geeft voor de rimpel of de tolerantie in het doorlaatgebied.

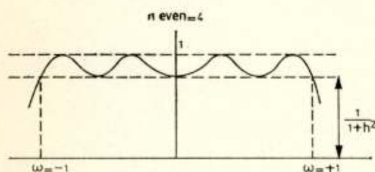


fig. 21
Rimpel in het kwadraat van de modulus van de spanningsoverdracht voor even waarde van n. ($n = 4$).

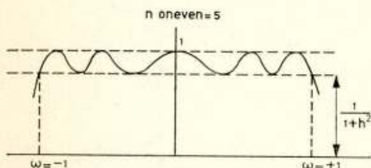


fig. 22
Rimpel in het kwadraat van de modulus van de spanningsoverdracht voor oneven waarde van n. ($n = 5$).

Voor *even waarden* van n is $T_n(\omega) = \pm 1$ voor $\omega = 0$. $T_n(\omega) = +1$ voor $\omega = \pm 1$. Voor *oneven waarden* van n is $T_n(\omega) = 0$ voor $\omega = 0$. $T_n(\omega) = +1$ als $\omega = 1$ en $T_n(\omega) = -1$ als $\omega = -1$.

Voor $n = 4$ en $n = 5$ krijgt men voor $\dfrac{1}{1 + h^2 T_n^2(\omega)}$ nevenstaande figuren:

Als doorlaatgebied wordt bij toepassing van polynomen van Tschebyschew gewoonlijk de genormaliseerde frequentie $\omega = 1$ genomen, dus $B = 1$. Men kan natuurlijk ook bij een rimpelwaarde h een andere waarde van B kiezen. Teneinde het netwerk te kunnen verwezenlijken moeten de polen van $\dfrac{1}{1 + h^2 T_n^2(\omega)}$ bepaald worden.

Aangezien de polen complex zijn stellen wij inplaats van ω:

$$\frac{p}{j} = \frac{\sigma + j\omega}{j} = \omega - j\sigma$$

Op de imaginaire as krijgt men de tschebyschew-functie voor de reële veranderlijke ω terug.

$$1 + h^2\, T_n^2\, (\omega - j\sigma) = 0$$

$$T_n^2\, (\omega - j\sigma) = \frac{j^2}{h^2}$$

$$T_n\, (\omega - j\sigma) = \pm\, j\, \frac{1}{h}$$

Als functie van een complexe veranderlijke z stellen wij:

$$T_n = \cos nz \qquad T_1 = \cos z = \omega - j\sigma$$
$$z = bg \cos (\omega - j\sigma) = u - jv$$
$$\begin{aligned} T_n\, (\omega - j\sigma) &= \cos n\,(u - jv) \\ &= \cos nu \cos jnv + \sin nu \sin jnv \\ &= \cos nu \cosh nv + j \sin nu \sinh nv \end{aligned}$$

Dus: $\cos nu \cosh nv + j \sin nu \sinh nv = \pm\, j\, \frac{1}{h}$

Aan deze vergelijking kan voldaan worden als $\cos nu \cosh nv = 0$.

$$\cos nu = 0 \quad \text{als} \quad nu = (2k + 1)\, \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\, (2k + 1)\, \frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{als} \quad k = 0, 2, 4, \text{enz.}$$

$$\sin\, (2k + 1)\, \frac{\pi}{2} = -1 \quad \text{als} \quad k = 1, 3, 5, \text{enz.}$$

Dus voor even waarden van k geldt: $\sin nu \sinh nv = \sinh nv = + \frac{1}{h}$

voor oneven waarden van k geldt: $\sin nu \sinh nv = - \sinh nv = - \frac{1}{h}$

Hiermede zijn u en v bekend.

$u_k = (2k + 1)\, \frac{\pi}{2n} \quad v_0 = \frac{1}{n}$ area sinh $\frac{1}{h}$ (onafhankelijk van k)

Vervolgens moet het reëel en imaginair deel van de polen bepaald worden. Gesteld is:

$$z_k = bg \cos(\omega - j\sigma) = u_k - jv_0$$

$$\cos z_k = \cos(u_k - jv_0) = \omega_k - j\sigma_k = \frac{1}{j} p_k$$

$$\omega_k - j\sigma_k = \cos u_k \cosh v_0 + j \sin u_k \sinh v_0, \text{ waaruit:}$$

$$p_k = -\sinh v_0 \sin(2k+1)\frac{\pi}{2n} + j\cosh v_0 \cos(2k+1)\frac{\pi}{2n}$$

De polen liggen op een ellips in het complexe vlak.

$$p_k = -\sigma_k + j\omega_k \qquad \frac{\sigma_k}{\sinh v_0} = \sin(2k+1)\frac{\pi}{2n}$$

$$\frac{\omega_k}{\cosh v_0} = \cos(2k+1)\frac{\pi}{2n}$$

Dus: $$\frac{\sigma_k^2}{\sinh^2 v_0} + \frac{\omega_k^2}{\cosh^2 v_0} = 1$$

Voorbeeld voor $n = 3$ (fig. 23)

De gezochte functie voor $n = 3$ is:

$$f_1(p) = \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)}$$

waarin p_1, p_2 en p_3 de polen zijn in de linkerhelft van het complexe vlak.

$$p_1 = -\sinh v_0 \sin\frac{\pi}{6} + j\cosh v_0 \cos\frac{\pi}{6}$$

of $$p_1 = -\sinh v_0 \cos\frac{\pi}{3} + j\cosh v_0 \sin\frac{\pi}{3}$$

$$p_2 = -\sinh v_0$$

$$p_3 = -\sinh v_0 \cos\frac{\pi}{3} - j\cosh v_0 \sin\frac{\pi}{3}$$

Bijv.: $\sinh nv_0 = \frac{1}{h} = 6{,}05 \quad nv_0 = 2{,}5$

$\sinh v_0 = 0{,}93 \qquad n = 3$

$\cosh v_0 = 1{,}37$

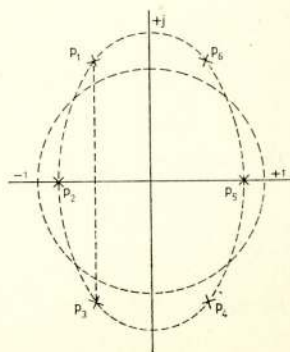


fig. 23
Ligging van de polen voor $n=3$.

Voorbeeld voor $n = 4$ (fig. 24)

$$f_1(p) = \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)}$$

$$p_1 = -\sinh v_0 \sin \frac{\pi}{8} + j\cosh v_0 \cos \frac{\pi}{8}$$

$$p_2 = -\sinh v_0 \cos \frac{\pi}{8} + j\cosh v_0 \sin \frac{\pi}{8}$$

$$p_3 = -\sinh v_0 \cos \frac{\pi}{8} - j\cosh v_0 \sin \frac{\pi}{8}$$

$$p_4 = -\sinh v_0 \sin \frac{\pi}{8} - j\cosh v_0 \cos \frac{\pi}{8}$$

$nv_0 = 2{,}5 \qquad v_0 = 0{,}625$

$\sinh v_0 = 0{,}67 \qquad \sin \frac{\pi}{8} = 0{,}38$

$\cosh v_0 = 1{,}27 \qquad \cos \frac{\pi}{8} = 0{,}925$

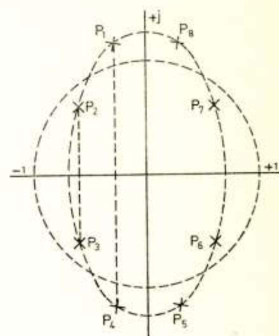


fig. 24
Ligging van de polen voor $n = 4$.

Uitgangspunten voor het ontwerp

In de eerste plaats dient een waarde aangenomen te worden voor de rimpel, bijv. 0,5, 1, 2 of 3 dB. Hieruit volgen h^2 en h:

Voor 1 dB is $\frac{E_0^2}{U_2^2} = 1{,}259 = 1 + h^2 \quad h^2 = 0{,}259 \quad h = 0{,}509$

Vervolgens moet de geëiste demping voor een bepaalde waarde van $\omega > 1$ gegeven worden. Bijv. voor $\omega = 4$ dient de demping 50 dB te zijn, d.w.z.:

$$\frac{1}{1 + h^2 \; T_n^2(4)} = 10^{-5} \qquad \text{of} \qquad h\,T_n(4) = 316$$

$$T_n(4) = \frac{316}{0{,}509} = 622$$

De waarde van n moet bepaald worden uit het gegeven: $T_n(4) = 622$.

$$T_n(4) = \cosh n\,(\text{area}\cosh 4) = 622$$

$$\text{area cosh } 4 = u \qquad \cosh u = 4 \qquad u = 2{,}07$$

$$\cosh 2{,}07\, n = 622$$

$$2{,}07\, n = 7{,}13 \qquad n = 3{,}5 \qquad \text{kies } n = 4$$

Evenals in het vorige geval zijn hier ook weer reactantieladders te gebruiken. Voor dit geval zijn in de reeds aangehaalde publikatie van L. Weinberg tabellen voor een rimpel van 0,5, 1, 2 en 3 dB en n van 1 tot 10 gegeven.

Manuscript ontvangen op 12 mei 1960.

Benaderingsmethode van overdrachtsfuncties, waarbij een rimpel zowel in het doorlaatgebied als in het dempingsgebied wordt voorgeschreven

door W. Nijenhuis *)

1. Inleiding

In deze voordracht zal een behandeling worden gegeven van een methode om overdrachtsfuncties, waarvan de rimpel in het doorlaat- en in het dempingsgebied is voorgeschreven te benaderen door gebroken rationale functies. De behandeling is gebaseerd op een elegante beschouwingswijze van Klinkhamer.[1] [2])

Uit de overweging, dat men hoogdoorlatende en banddoorlatende filters door een geschikte frequentie-transformatie tot een laagdoorlatend filter kan terugbrengen zullen wij ons in het volgende alleen met dit laatste geval bezighouden.

Zoals in de vorige voordracht reeds is aangestipt wenst men een overdracht (verhouding van uitgangs- tot ingangsspanning)

$$\left|\frac{u}{e}\right| = \left|\varphi(j\omega)\right|$$

met het volgende karakter (zie fig. 1):

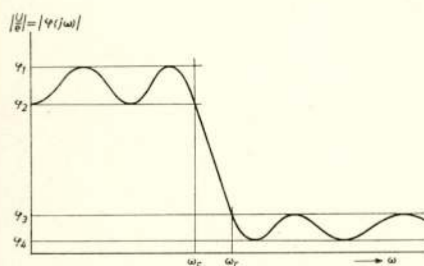


fig. 1
Gewenst karakter van de overdrachtsfunctie.

In het doorlaatgebied moet de overdracht een relatief hoge waarde bezitten en hiervan ten hoogste met een gegeven tolerantie afwijken. In het dempingsgebied

---

*) Natuurkundig Laboratorium N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven-Nederland.

[1]) J. F. Klinkhamer, niet gepubliceerde beschouwingen (1943), zie ook: J. F. Klinkhamer, Lineaire vierpolen met voorgeschreven overdrachtsfunctie. De Ingenieur, 67 (1955) E 1.

[2]) W. Milort, Telecommunication Review 20, (1959) 158.

moet de overdracht een relatief lage waarde hebben, en hiervan ten hoogste met een gegeven tolerantie afwijken. Soms zal men hierbij wensen dat de overdracht in enkele punten van het dempingsgebied werkelijk de waarde nul aanneemt — soms eist men dit niet.

Tussen doorlaat- en dempingsgebied bevindt zich een overgangsgebied, liggende tussen gegeven frequenties ω_c en ω_r. De overdracht in het doorlaat- en die in het dempingsgebied moeten een voorgeschreven bedrag uit elkaar liggen.

In de praktijk worden deze eisen meestal geformuleerd in termen van de demping a

$$a = -20\,{}^{10}\log \left| \frac{u}{e} \right| dB.$$

Deze grootheid heeft dan in het dempingsgebied relatief hoge waarden (eventueel bij sommige frequenties $+\infty$) met een gegeven tolerantie en in het doorlaatgebied lage waarden met een gegeven tolerantie.

In het volgende zullen wij de eisen formuleren door het geven van de verhoudingen (zie fig. 1).

$$\varphi_1/\varphi_2,\ \varphi_2/\varphi_3,\ \varphi_3/\varphi_4, \text{ alle} > 1.$$

Door het toevoegen van een extra versterking kan men altijd bereiken dat tenslotte $\varphi_1 = 1$ wordt.

2. Het Vliesmodel

Wij zullen de overdrachtsfunctie vaak in het gehele complexe vlak beschouwen; en schrijven $\frac{u}{e} = \varphi(p) = \varphi(\sigma + j\omega)$.

Zoals in de voorafgaande voordrachten besproken is, zal $\varphi(p)$ een gebroken rationele functie van p zijn, waarvan wij polen en nulpunten zó moeten trachten te bepalen, dat $|\varphi(j\omega)|$ het gewenste karakter krijgt. Inplaats van $|\varphi(j\omega)|$ kunnen wij echter evengoed $|\varphi(j\omega)|^2$ beschouwen; schrijven wij dit als $\varphi(j\omega) \cdot \varphi(-j\omega)$ dan zien we dat het kwadraat van de overdracht, $\left|\frac{u}{e}\right|^2$, ook verkregen kan worden als de waarde van de functie $\varphi(p)\,\varphi(-p)$ op de imaginaire as.

Vóór verder te gaan, willen wij nu enkele woorden wijden aan het „vliesmodel" van een functie $f(p)$ van een complexe variabele p, d.w.z. wij beschouwen het oppervlak

$$|f(p)| = |f(\sigma + j\omega)|$$

als functie van σ en ω. Dit oppervlak is een berglandschap met „pieken" bij de polen van $f(p)$ en „kuilen" bij de nulpunten. Om dit in te zien stellen wij in de omgeving van een pool p_0:

$$p = p_0 + r\,e^{j\Theta};$$

in de omgeving van een nulpunt p_1:

$$p = p_1 + s\,e^{j\varphi}$$

en kunnen daarmee schrijven:
bij een enkelvoudige pool

$$|f(p)| \approx \left| \frac{A}{r\,e^{j\Theta}} + (\text{iets eindigs}) \right| \approx \frac{A}{r} \text{ en}$$

bij een enkelvoudig nulpunt

$$|f(p)| \approx |s\,e^{j\varphi} \,.\, (\text{iets} \neq 0)| \approx B.s.$$

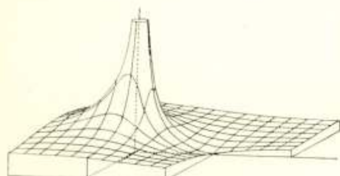


fig. 2
„Vliesmodel" van de functie $f(p) = \frac{p-1}{p}$

M.a.w. dicht bij een pool heeft het oppervlak de vorm van een naald met een hyperbolisch profiel, dicht bij een nulpunt van een kegelvormig kuiltje (zie fig. 2).

Om het gewenste gedrag van $|\varphi(j\omega)|$ te verkrijgen zal het dus nodig zijn om naast de imaginaire as, in de buurt van het doorlaatgebied polen te leggen die het vlies omhoog tillen en in de buurt van het dempingsgebied nulpunten die het vlies omlaag houden.

Om de invloed van deze polen en nulpunten op het vliesmodel als het ware gescheiden van elkaar te kunnen bespreken zullen wij trachten om door een conforme afbeelding van het frequentievlak (p-vlak) bedoelde gebieden uit elkaar te leggen.

Hiertoe zullen we eerst iets over conforme afbeeldingen in het algemeen bespreken.

3. Conforme Afbeelding

Indien wij een z-vlak op een w-vlak afbeelden door middel van de functie $w = f(z)$, dan kunnen we een nader inzicht in

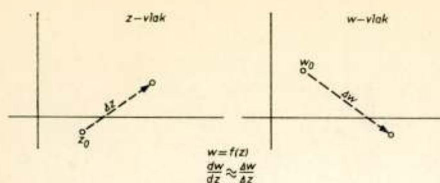


fig. 3
Afbeelding van een z-vlak op een w-vlak.

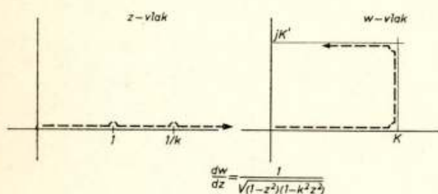
de eigenschappen van deze afbeelding verkrijgen door het beschouwen van de afgeleide functie (fig. 3).

Immers $\frac{dw}{dz} \approx \frac{\triangle w}{\triangle z}$ voor voldoend kleine aangroeiingen; kennen wij deze afgeleide als functie van z, dan vertelt dit hoe lijnstukjes in het z-vlak en het w-vlak bij elkaar behoren, bijv. ten aanzien van hun richtingen.

Beschouwen wij bijv.:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-z)(1+z)(1-kz)(1+kz)}}; \; (k<1).$$

Deze vorm is reëel als z reëel en $|z|<1$ of $\frac{1}{k}<|z|$ is, en zuiver imaginair als z reëel en $1<|z|<\frac{1}{k}$ is. Dit betekent dat de lijnstukken in het w-vlak die corresponderen met de reële z-as voor $|z|<1$ en $|z|>\frac{1}{k}$ de richting van de reële as hebben en voor $1<|z|<\frac{1}{k}$ de richting van de imaginaire as van het w-vlak hebben. Door meer in het bijzonder het gedrag van elk der 4 factoren onder het wortelteken te beschouwen, kan men aantonen dat het doorlopen van de reële as van het z-vlak, daarbij de singuliere punten $z = 1$ en $z = \frac{1}{k}$ door boogjes aan de bovenzijde ontwijkend, neerkomt op het doorlopen van het w-vlak volgens fig. 4.



$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$
fig. 4
Eigenschappen van de afbeelding
$z = sn(w, k)$

De punten $z = 1$, $z = \frac{1}{k}$ en $z = \infty$ corresponderen daarbij met resp.

$$w(1) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = K(k).$$

$$w\left(\frac{1}{k}\right) = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = K(k) + jK'(k).$$

$$w(\infty) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = jK'(k).$$

Deze elliptische integralen van de 1e soort hangen nog slechts van de parameter k af; hun uitkomsten worden meestal aangegeven met $K(k)$, $K(k) + jK'(k)$ en $jK'(k)$, resp.

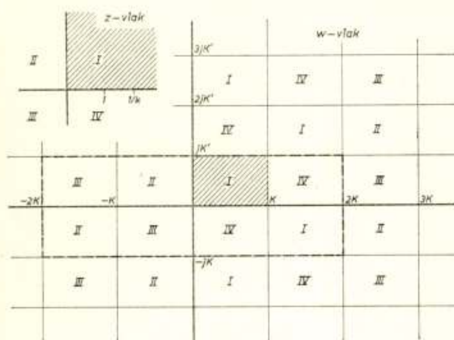


fig. 5
Eigenschappen van de afbeelding
$z = sn(w, k)$

De kwadranten I, II, III en IV van het z-vlak (fig. 5) corresponderen met rechthoeken in het w-vlak; daarbij komt men op verschillende w-waarden terecht al naar men, bij het gaan van I naar IV bijvoorbeeld, de reële z-as snijdt bij een punt $z < 1$, bij $1 < z < \frac{1}{k}$, of bij een punt $\frac{1}{k} < z$. Op deze wijze blijkt z een dubbel periodieke functie van w te zijn met de perioden $4K$ en $2jK'$, waarbij het kwadrant I in het z-vlak overeenkomt met elk der rechthoeken I in het w-vlak.

Ook op andere wijze kan men nog een inzicht krijgen in de periodiciteiten van z als functie van w. Hiertoe berekenen we

$$w(z) = \int_0^{z} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{3.1}$$

langs verschillende integratiewegen. Eerst echter moeten we opmerken dat de wortelvorm onder het integraalteken in principe twee waarden bezit die in het teken verschillen. De punten $\pm\frac{1}{k}$ en ± 1 zijn *vertakkingspunten* van deze vorm; wat zeggen wil dat men in het complexe z-vlak van een willekeurig punt uitgaande en langs een willekeurige kromme weer terugkerend alleen dàn dezelfde waarde van de wortelvorm terugkrijgt indien men géén of een even aantal vertakkingspunten heeft omvat. Omvatte men bij zijn omloop in het complexe z-vlak een

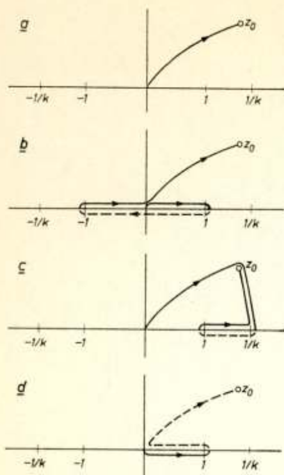


fig. 6
Integratie-wegen voor de elliptische integralen van de 1e soort.

oneven aantal vertakkingspunten dan heeft de wortelvorm bij terugkomst de tegengestelde waarde aangenomen. Men kan nu de uitkomsten van (3.1) voor een gegeven $z = z_0$ op de volgende manieren berekenen (zie fig. 6). Hierbij is steeds de waarde van de integrand op de gestippelde trajecten tegengesteld te nemen aan de waarde op de overeenkomstige getrokken trajecten.
Langs weg a: Stel uitkomst $= I$.
Langs weg b: Uitkomst $= I + 4K$.
Langs weg c: Uitkomst $= I + 2jK'$.
Langs weg d: Uitkomst $= 2K - I$.

Door meermalen de punten ± 1 volgens weg b of de punten 1 en $\frac{1}{k}$ volgens weg c te omvatten, hetzij in positieve of in negatieve zin, verkrijgt men

$$I \pm 4\lambda K \text{ resp. } I \pm 2jmK'; \quad \lambda = 1, 2 \ldots \quad m = 1, 2 \ldots$$

Bij de waarde $z = z_0$ behoren dus de waarden $w = I \pm 4\lambda K \pm 2jmK'$ en eveneens de waarden $2K - w$; z is dus een dubbel periodieke functie van w met de periode $4K$ en $2jK'$.

Deze functie, de omkering dus van de functie

$$w(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - t^2k^2)}},$$

is de elliptische functie sinusamplitudo, afgekort $z = sn(w, k)$. Door nu deze functie te gebruiken voor de afbeelding van het complexe frequentievlak, daarbij de ω-as van het frequentievlak als reële as van het z-vlak kiezend, en tevens door het stellen van $\frac{p}{\omega_c} = jz$ daarbij de frequentieschaal zó transformerend dat de frequentie $p = j\omega_c$ met $z = 1$ correspondeert, kan men verkrijgen dat de doorlaat- en dempingsgebieden langs twee evenwijdige, doch verschillende rechten in het ω-vlak vallen, hetgeen onze opzet was. Hierbij is $k = \frac{\omega_c}{\omega_r}$ te nemen.

4. Ligging van Polen en Nulpunten.

Wij merken nog op, dat in het w-vlak niet alleen het stuk van de reële-as van $w = 0$ tot $w = K$ overeenkomt met het doorlaatgebied, maar dat de gehele reële as in het w-vlak en daarmee alle lijnen $w = u \pm 2jmK'$ (u reëel, $m = 0, 1, 2, \ldots$) steeds een herhaling van het doorlaatgebied voorstellen. Hetzelfde geldt voor het dempingsgebied ten aanzien van de lijnen $w = u \pm (2m + 1)jK'$.

Men kan nu aan de doorlaat- en dempingseisen voldoen door een zodanige configuratie van polen en nulpunten in het w-vlak aan te brengen dat het vliesmodel ervan

a. voldoende hoog ligt langs de lijnen $w = u \pm j\,2m.K'$ en
   voldoende laag langs de lijnen $w = u \pm j(2m + 1)K'$.
b. Langs de genoemde stellen lijnen voor elk stel een gelijke rimpel heeft.

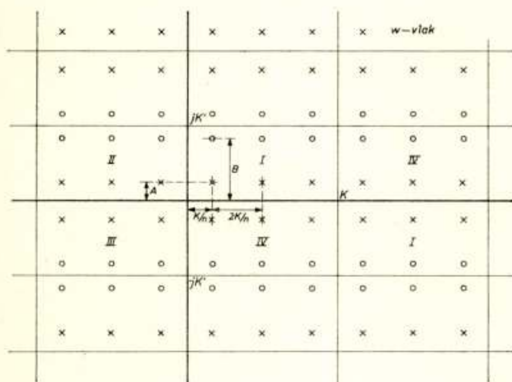


fig. 7
Periodiek polen- en nulpunten patroon.

Hieraan kan voldaan worden door een periodiek patroon van polen en nulpunten als in fig. 7. Bij een dergelijk patroon is men immers er zeker van dat men langs elke lijn // aan de reële w-as een doorsnede van het vliesmodel verkrijgt die periodiek is met dezelfde periode als die van de polen en nulpunten. Hiervan zijn dan tevens alle maxima en minima onderling gelijk. De diepte van de rimpels in het doorlaatgebied bijv., is daarbij in hoofdzaak afhankelijk van het aantal polen per periode-rechthoek en van hun afstand A tot de as, en pas in tweede instantie van de ligging van de nulpunten en de verder verwijderde polen. De afstand van de nulpunten tot de as zullen wij in het volgende met B aangeven (zie fig. 7).

Bij de terugtransformatie van een pool of nulpunt bij $w = w_i$ naar het frequentievlak kan men de plaats van de polen en nulpunten vinden uit

$$p_i = j\,z_i = j\,sn\,(w_i, k)$$

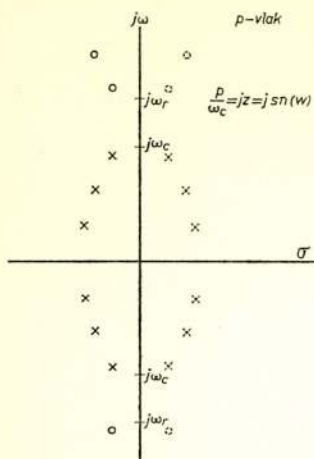


fig. 8
Polen en nulpuntenconfiguratie van een overdrachtsfunctie.

met behulp van daarvoor bestaande omrekeningsformules en tabellen. Het resultaat heeft dan ongeveer de gedaante van fig. 8. Hiermede is dus een overdrachtsfunctie gevonden van de gewenste gedaante. Uit de ontstaanswijze volgt echter dat deze functie zowel polen en nulpunten in het linker- als in het rechterhalfvlak zou bezitten, hetgeen tot niet-realiseerbare netwerken zou voeren. Anderzijds echter bezit de polen- en nulpuntenfiguur radiale symmetrie ten opzichte van de oorsprong, zodat de ontstane functie te schrijven moet zijn als $\varphi(p) \cdot \varphi(-p)$. Nu kunnen wij echter gebruik maken van de in § 2 genoemde stelling, nl. dat voor $p = j\omega$.

$$\varphi(p) \cdot \varphi(-p) = |\varphi(p)|^2$$

Door voor $\varphi(p)$ nu alleen polen en nulpunten uit het linker halfvlak van fig. 8 te nemen splitsen wij een realiseerbare functie af waarvan het kwadraat van de absolute waarde voor alle reële ω geheel gelijk is aan de vorm van het geconstrueerde vliesmodel, dus voldoet aan de gestelde eisen.

5. Benaderingsformules

Tot slot zullen wij nog toelichten hoe het mogelijk is om tot benaderingsformules voor het aantal polen en nulpunten per periode te komen en de afstand ervan tot de as; welke formules o.a. door Klinkhamer gegeven zijn. Hierbij gaan wij ervan uit dat men gemakkelijk een oneindig-productvoorstelling van de functie uit fig. 7 kan opstellen. Indien men in de rechthoeken I en II van het w-vlak n polen en n nulpunten wenst, en men dus de afstanden der polen $\frac{2K}{n}$ kiest, dan heeft voor even n de functie

$$\prod_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2K}(w - jB - 2\nu jK') \cos \frac{n\pi}{2K}(w + jB + 2\nu jK')}{\cos \frac{n\pi}{2K}(w - jA - 2\nu jK') \cos \frac{n\pi}{2K}(w + jA + 2\nu jK')} \tag{5.1}$$

de gevraagde nulpunten en polen. In het geval van oneven n verkrijgt men een soortgelijke formule met sinus- inplaats van cosinus-factoren. Wij beperken ons in het volgende gemakshalve tot even n.

Uit de „snijbreedte" van het filter volgt k, $\frac{\omega_c}{\omega_r} = k$. Nu zien wij uit tabel I die het verband geeft van k met $\frac{K'}{K}$, dat al heel gauw $\frac{K'}{K} \geqslant 0{,}5$ en daar toch allicht $n =$ ca. 4, volgt voor

$$\frac{n\pi K'}{K} \geqslant 6\,.$$

Verder zal $B \approx K'$.

Houden wij dit in het oog dan vinden wij na enig omvormen en het weglaten van factoren die ≈ 1 zijn, de uitdrukkingen

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \simeq \frac{1}{tgh\,\frac{n\pi A}{2K}} \simeq 1 + 2\,e^{-\frac{n\pi A}{K}} \tag{5.2}$$

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_3} \simeq \frac{e^{\frac{n\pi K'}{2K}}}{4\cosh\frac{n\pi A}{2K}\cosh\frac{n\pi(K'-B)}{2K}} \tag{5.3}$$

$$\frac{\varphi_3}{\varphi_4} \simeq \frac{1}{tgh\,\frac{n\pi(K'-B)}{2K}} \simeq 1 + 2\,e^{-\frac{n\pi\,(K'-B)}{K}} \tag{5.4}$$

Hiermede kunnen wij schrijven

$$\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_3}\right)^2 \simeq \frac{e^{\frac{n\pi K'}{K}}}{16}\left[-\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^2 + 1\right]\left[-\left(\frac{\varphi_4}{\varphi_3}\right)^2 + 1\right]$$

of

$$e^{\frac{n\pi K'}{K}} \simeq \frac{16\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_3}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\varphi_4}{\varphi_3}\right)^2\right]}$$

Nemen wij in aanmerking dat

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = 1 - \delta,\ \frac{\varphi_4}{\varphi_3} = 1 - \varepsilon;\ \delta \text{ en } \varepsilon \ll 1,$$

dan kan men schrijven

$$e^{\frac{n\pi K'}{K}} \simeq 4\,\frac{\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_3}\right)^2}{\delta\,.\,\varepsilon} \simeq 4\,\frac{\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_3}\right)^2}{ln\,\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\,.\,ln\,\frac{\varphi_4}{\varphi_3}}$$

of

$$\frac{n\pi K'}{K} \simeq ln\,4 + 2\,ln\,\frac{\varphi_2}{\varphi_3} - ln\left(ln\,\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) - ln\left(ln\,\frac{\varphi_4}{\varphi_3}\right)$$

Daar $\frac{K'}{K}$ bekend is uit de gegeven „snij-breedte" van het filter, is dit een betrekking voor n. Daarna vindt men een benadering voor A en $K' - B$ uit

$$-\frac{n\pi A}{K} \simeq \tfrac{1}{2}\,ln\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} - 1\right) \simeq \tfrac{1}{2}\,ln\,\delta$$

$$-\frac{n\pi\,(K' - B)}{K} \simeq \tfrac{1}{2}\,ln\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_4} - 1\right) \simeq \tfrac{1}{2}\,ln\,\varepsilon$$

Door Klinkhamer zijn soortgelijke formules afgeleid. De praktische toepassing ervan zal in de volgende voordracht naar voren komen.

Tabel I

k	$\frac{K'}{K}$
0,1	2,35
0,2	1,90
0,3	1,63
0,4	1,43
0,5	1,28
0,6	1,14
0,7	1,01
0,8	0,877
0,9	0,726
0,95	0,622
0,98	0,525
0,99	0,471

Manuscript ontvangen 20 januari 1960.

De bepaling van de overdrachtsfunctie voor filters met Tschebyschew-eigenschappen in de overdrachtskarakteristiek

door W. Milort

1. Vierpoolparameters

1.1. *Vierpoolvergelijkingen*

Voor de passieve lineaire vierpool, geschakeld als in figuur 1, zijn de volgende vierpoolvergelijkingen op te stellen:

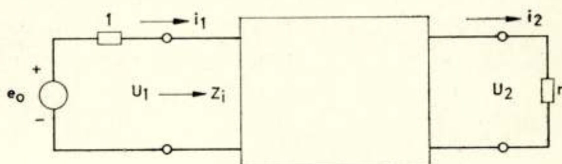


fig. 1
De spanningsbronschakeling van een passieve lineaire vierpool.

a): $u_1 = z_{11} i_1 - z_{12} i_2$
$u_2 = z_{21} i_1 - z_{22} i_2$ of $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ -i_2 \end{bmatrix}$

Voor de *impedantiematrix* $[z]$ geldt: $z_{12} = z_{21}$

b): $i_1 = y_{11} u_1 - y_{12} u_2$
$i_2 = y_{21} u_1 - y_{22} u_2$ of $\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{bmatrix}$

Voor de *admittantiematrix* $[y]$ geldt: $y_{12} = y_{21}$

c): $u_1 = Au_2 + Bi_2$
$i_1 = Cu_2 + Di_2$ of $\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$

Voor de *kettingmatrix* $[K]$ geldt: $AD - BC = 1$

De betrekkingen tussen de elementen van de verschillende matrices luiden:

$$A = z_{11}/z_{12} \qquad = y_{22}/y_{12}$$

$$B = (z_{11}z_{22} - z_{12}^2)/z_{12} \qquad = 1/y_{12}$$

$$C = 1/z_{12} \qquad = (y_{11}y_{22} - y_{12}^2)/y_{12}$$

$$D = z_{22}/z_{12} \qquad = y_{11}/y_{12}$$

$$z_{11} = A/C \qquad y_{11} = D/B$$

$$z_{12} = 1/C \qquad y_{12} = 1/B$$

$$z_{22} = D/C \qquad y_{22} = A/B$$

1.2. *Nieuwe vierpoolparameters en -functies*

Uit de onder 1.1. gegeven betrekkingen blijkt dat de elementen van $[K]$ een gemeenschappelijke noemer bezitten, die wordt gevormd door de teller van de overdrachtsimmittantie (de overdrachtsimmittantie $y_t = \frac{i_2}{e_0}$ b.v. kan worden uitgedrukt in de elementen van $[z]$:

$$y_t = \frac{z_{12}}{(1 + z_{11})(r + z_{22}) - z_{12}^2}).$$

De nulpunten van de gemeenschappelijke noemer zijn dus nulpunten van de overdrachtsimmittantie of m.a.w.: de *dempingspolen* van de vierpool.

Stel $A = \frac{a}{f}$, $B = \frac{b}{f}$, $C = \frac{c}{f}$ en $D = \frac{d}{f}$, dan vertegenwoordigt het *polynoom* f de nulpunten van de overdrachtsfunctie.

Wordt de spanningsbron plotseling kortgesloten dan volgen uit de vergelijking $1 + z_i = 0$ de *eigen frequenties* van de passieve vierpool, afgesloten door de weerstanden 1 en r.

Substitutie van $u_2 = ri_2$ in de vierpoolvergelijkingen geeft:

$$1 + z_i = 1 + \frac{ar + b}{cr + d} = \frac{(a + c)r + b + d}{cr + d} = 0$$

Definieer nu $(a + c)r + b + d = 2g\sqrt{r}$; het *polynoom* g vertegenwoordigt dan de eigen frequenties van de afgesloten vierpool.

Uit de netwerkanalyse is genoegzaam bekend dat de wortels van het polynoom g een negatief reëel deel moeten bezitten, m.a.w.: g moet een Hurwitzpolynoom zijn.

De spanningsbron kan aan de vierpool een maximumvermogen $\frac{e_0^2}{4}$ afgeven, indien $z_i = 1$. De vergelijking $z_i - 1 = 0$, de zg. aanpassingsvergelijking, levert dus de *reflectienulpunten*.

$$z_i - 1 = \frac{(a - c)r + b - d}{cr + d} = 0$$

Definieer $(a - c)r + b - d = 2h\sqrt{r}$; de wortels van het *polynoom* h geven de frequenties waarbij geen reflectie aan de ingang van de vierpool plaats vindt.

12..1. De polynomen f, g en h die het karakter van de vierpool geheel bepalen, worden de *karakteristieke polynomen* genoemd. Elk quotiënt van twee van de drie polynomen heeft een bepaalde betekenis in de vierpooltheorie. Zo is:

$\frac{f}{g}$ = *overdrachtsfunctie*

$\frac{h}{g}$ = *reflectiefunctie*

$\frac{h}{f}$ = *karakteristieke functie*

De *bedrijfsdemping*

$$a_b = 10 \log \left| \frac{g}{f} \right|^2 = 10 \log \left\{ 1 + \left| \frac{h}{f} \right|^2 \right\}$$

De *echodemping*

$$a_e = 10 \log \left| \frac{g}{h} \right|^2$$

De *vermogensbalans*

$$1 = \left| \frac{f}{g} \right|^2 + \left| \frac{h}{g} \right|^2 = 10^{-a_b} + 10^{-a_e}$$

althans voor zuiver reactieve (dus verliesvrije) vierpolen.

1.2.2. Door de vierpoolvergelijkingen voor $[K]$ iets anders te schrijven is een en ander eenvoudig te herkennen. Normaliseer daartoe de ingangsgrootheden op de wortel uit de inwendige weerstand R_1 van de spanningsbron ($= 1$ in figuur 1) en de uitgangsgrootheden op de wortel uit de belastingsweerstand R_2 ($= r$ in figuur 1).

Stel $e_0' = \frac{e_0}{\sqrt{R_1}} = e_0$, $u_1' = \frac{u_1}{\sqrt{R_1}} = u_1$ en $i_1' = i_1\sqrt{R_1} = i_1$;

$$u_2' = \frac{u_2}{\sqrt{R_2}} = \frac{u_2}{\sqrt{r}} \text{ en } i_2' = i_2\sqrt{R_2} = i_2\sqrt{r}$$

Hiermede is bereikt dat $u_2' = i_2'$ en $e_0' = u_1' + i_1'$

Uit de vierpoolvergelijkingen volgt nu:

$$u_1' + i_1' = \frac{1}{2f\sqrt{r}}\{(a+c)r + b + d\} \,.\, (u_2' + i_2') = \frac{g}{f}(u_2' + i_2')$$

$$\text{of: } e_0' = \frac{2g}{f}u_2', \text{ dus } \frac{2u_2'}{e_0'} = \frac{f}{g}$$

$$u_1' - i_1' = \frac{1}{2f\sqrt{r}}\{(a-c)r + b - d\} \,.\, (u_2' + i_2') = \frac{h}{f}(u_2' + i_2')$$

$$\text{of } \frac{u_1' - i_1'}{u_2' + i_2'} = \frac{h}{f}\,.$$

Verder is $\frac{u_1' - i_1'}{u_1' + i_1'} = \frac{h}{g}$

Enige andere betrekkingen, uitgedrukt in f, g en h:

$$\frac{u_2'}{u_1'} = \frac{f}{g+h} \qquad \frac{i_2'}{i_1'} = \frac{f}{g-h}$$

$$\frac{u_1'}{e_0'} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{h}{g}\right) \qquad \frac{i_1'}{e_0'} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{g}\right)$$

$$a_b = 10 \log \left|\frac{e_0}{u_2}\right|^2 . \frac{r}{4} = 10 \log \left|\frac{e_0'}{2u_2'}\right|^2 = 10 \log \left|\frac{g}{f}\right|^2$$

$$a_e = 10 \log \left|\frac{z_i + 1}{z_i - 1}\right|^2 = 10 \log \left|\frac{u_1' + i_1'}{u_1' - i_1'}\right|^2 = 10 \log \left|\frac{g}{h}\right|^2$$

2. **Uitgangspunt voor het filterontwerp**

Is het te ontwerpen filter frequentie-symmetrisch, d.w.z. kan

het filter door een eenvoudige frequentie-transformatie*) uit een laagdoorlaatfilter (ook wel laagdoorlaat-equivalent genoemd) worden verkregen en is bovendien de dempingseis in het dempingsgebied c.q. de dempingsgebieden onafhankelijk van de frequentie, dan is de *overdrachtsfunctie* $\frac{f}{g}$ het ideale uitgangspunt.

Met behulp van een enkele transformatie kunnen de wortels van de polynomen f en g zodanig worden gekozen dat de overdrachtskarakteristiek zowel in het doorlaat- als in het dempingsgebied Tschebyschew-eigenschappen vertoont.

In de bijzondere gevallen dat ook de belastingsweerstand $r = 1$ kan worden gekozen en dat het niet noodzakelijk wordt geacht de dissipatie in de vierpool intrinsiek te compenseren, is de berekening van de karakteristieke functie $\frac{h}{f}$ met behulp van dezelfde transformatie nog eenvoudiger. Voor de synthese van de vierpool heeft men echter toch ook de wortels van g nodig. Gelden voor het te ontwerpen filter de bovengenoemde voorwaarden niet en is het gewenst de overdrachtskarakteristiek in het doorlaatgebied Tschebyschew-eigenschappen te verlenen, dan is in het algemeen de *karakteristieke functie* $\frac{h}{f}$ als uitgangspunt aangewezen. De wortels van het polynoom h worden alle op de reële-frequentie-as gelegd, hetgeen impliceert dat intrinsieke compensatie van dissipatie-verliezen, hoewel niet onmogelijk, achterwege wordt gelaten vanwege de grote hoeveelheid extra rekenwerk.**)

3. Bepaling van polen en nulpunten van de overdrachtsfunctie

De overdrachtskarakteristiek van het gevraagde filter wordt getransformeerd tot die voor het laagdoorlaatequivalent. Het doorlaatgebied wordt gevormd door $0 \leq \Omega \leq 1$ en heeft een voorgeschreven doorlaatdemping a_p met een maximum-variatie $\pm \triangle a_p$; het dempingsgebied $\frac{1}{k} \leq \Omega \leq \infty$ heeft een minimumdemping $a_p + a_s$ of m.a.w. een discriminatie a_s t.o.v. het door-

*) Zie hiervoor het artikel van Prof. Dr. Ir. W. Th. Bähler elders in dit nummer.

**) Zie voor dit tweede uitgangspunt het artikel van Ir. A. Fettweis elders in dit nummer.

laatgebied. De grootheid k ($0 < k < 1$) is een nieuwe parameter. Figuur 2 geeft een en ander aanschouwelijk weer.

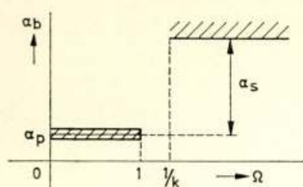


fig. 2
Formulering van de eisen aan de amplitude-frequentiekarakteristiek voor een laagdoorlaatequivalent.

Stel de genormaliseerde complexe frequentie $p = -\varrho + j\Omega$. Om de gevraagde overdrachtskarakteristiek zo goed mogelijk te benaderen (Tschebyschewbenadering), wordt het p-vlak in het u-vlak getransformeerd door de transformatie

$$p = -\varrho + j\Omega = j \, . \, sn\,(u, k) = j\, sn\,(v + jw)$$

waarin $u = v + jw$ een complexe functie is en waarbij de parameter k geïdentificeerd wordt met de zojuist ingevoerde frequentieparameter. De reële frequentie-as in het p-vlak wordt afgebeeld op de omtrek van de rechthoek in het u-vlak, zoals figuur 3 laat zien.*)

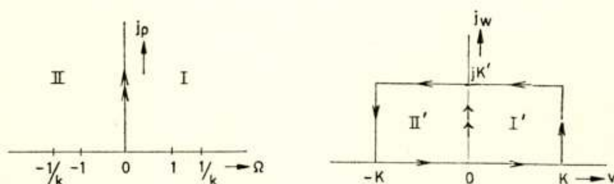


fig. 3
Transformatie van het complexe p-vlak naar het complexe u-vlak volgens de formule

$$p = -\varrho + j\Omega = j\, sn\,(u, k) = j\, sn\,(v + jw)$$

De lijn $w = 0$ is de doorlaatlijn en de lijn $w = K'$ de dempingslijn. Beide gebieden zijn dus nu in het u-vlak afgebeeld op twee evenwijdige en gelijke lijnstukken.

Het overgangsgebied $1 < \Omega < 1/k$ wordt in het u-vlak afgebeeld op de lijn $v = K$; de imaginaire as $\Omega = 0$ op de lijn $v = 0$.

Het gestelde doel wordt nu bereikt door op de dempingslijn nulpunten van de overdrachtsfunctie (wortels van f) equidistant en symmetrisch t.o.v. de lijnen $v = 0$ en $v = \pm K$ neer te leggen en op een lijn $w = \mu K'$ op overeenkomstige plaatsen polen van de overdrachtsfunctie (wortels van g).

*) Voor een uitvoerige beschouwing van deze transformatie wordt verwezen naar het artikel van Ir. W. Nijenhuis in dit nummer.

Figuur 4a geeft een aanschouwelijke voorstelling van dit proces voor 5 nulpunten en 5 polen per periode $2K$.

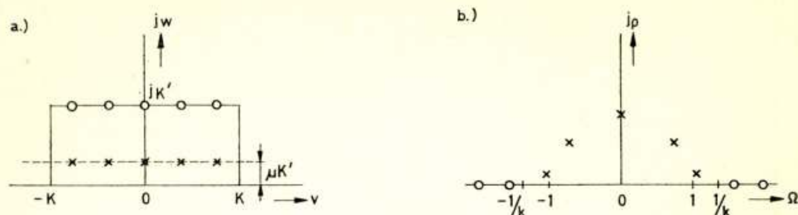


fig. 4

Ligging van polen en nulpunten van de overdrachtsfunctie voor $n = 5$ in het u-vlak (4a) en in het p-vlak (4b).

Het aantal, n, nulpunten en polen per periode $2K$ en de waarde van μ zijn uiteraard een functie van k, $\triangle a_p$ en a_s.

Eenvoudige en voldoende nauwkeurige formules voor n en μ zijn door Ir. J. F. Klinkhamer afgeleid.*)

$$n' = \frac{0{,}23\,K}{\pi\,K'} \cdot \left[a_s + 10 \log \frac{4 \times 8{,}686}{\triangle a_p}\right]$$

$$\mu = \frac{2{,}3\,K}{\pi\,n'\,K'} \cdot \log \frac{8{,}686}{\triangle a_p}$$

Eén of meer van de gegeven grootheden k, $\triangle a_p$ en a_s wordt c.q. worden zodanig gevarieerd dat $n' = n =$ geheel getal wordt, zonder natuurlijk te kort te doen aan de oorspronkelijk gestelde eisen.

De coördinaten van nulpunten en polen in het p-vlak (zie figuur 4b) volgen uit de transformatieformule:

$$\varrho = \frac{cn\,v \,.\, dn\,v \,.\, sn\,w \,.\, cn\,w}{1 - dn^2\,v \,.\, sn^2\,w}; \qquad \Omega = \frac{sn\,v \,.\, dn\,w}{1 - dn^2\,v \,.\, sn^2\,w}$$

Voor $w = 0$ is $\varrho = 0$ en $\Omega = sn\,v$ (doorlaatlijn);

voor $w = K'$ is $\varrho = 0$ en $\Omega = \dfrac{1}{k \,.\, sn\,v}$ (dempingslijn).

De eenvoudige formule voor de doorlaatlijn, $\Omega = sn\,v$, kan worden gebruikt als de reflectienulpunten (wortels van h) op de

*) Natuurkundig laboratorium van de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken.

reële frequentie-as kunnen worden gelegd. In het u-vlak liggen de reflectienulpunten dan nl. op de lijn $w = 0$ loodrecht onder de nulpunten en polen van de overdrachtsfunctie.

De elliptische functies kunnen eenvoudig uit bestaande uitvoerige tabellen*) worden afgelezen; de functies van v leest men af voor de waarde $\varphi = \text{arc sin } k$ en de functies van w voor $\varphi' = \text{arc sin } k'$, waarbij $k' = \sqrt{1 - k^2}$, zodat $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

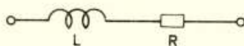
4. Intrinsieke compensatie van dissipatie-verliezen

De overdrachtskarakteristiek wordt in de praktijk vervormd onder invloed van de ohmse verliezen in de reactieve elementen. De eigenresonantiefrequenties van de afgesloten vierpool zullen daardoor een verschuiving ondergaan; het negatief reële deel van de wortels van g wordt meer negatief. De invloed hiervan op de overdrachtskarakteristiek uit zich het meest in de omgeving van de grensfrequentie, omdat daar, zoals duidelijk uit figuur 4b blijkt, de verandering van het negatief reële deel relatief het grootst is.

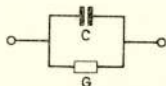
Door nu niet de oorspronkelijke wortels van het polynoom g als uitgangspunt voor de filtersynthese te kiezen, maar de wortels van een polynoom g_1, waarvan de negatief reële delen een nader vast te stellen bedrag groter (dus minder negatief) zijn, wordt de *invloed van de ohmse verliezen intrinsiek gecompenseerd*.

Na realisering van het filter met reactieve elementen met de juiste verliesmaat wordt een vierpool verkregen met de oorspronkelijke eigenresonantiefrequenties.

4.1. Beschouw de volgende *standaardbouwstenen*, opgebouwd uit reactieve elementen met een zekere verliesmaat:

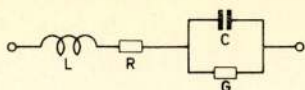


$$Z = R + j\omega L = (\sigma_l + j\omega) \, . \, L \text{ met } \sigma_l = \frac{R}{L}$$

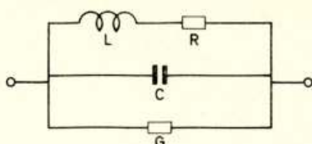


$$Y = G + j\omega C = (\sigma_s + j\omega) \, . \, C \text{ met } \sigma_c = \frac{G}{C}$$

*) Bv: G. W. Spenceley en R. M. Spenceley: „Smithsonian elliptic functions tables", The Smithonian Inst., Washington, 1947.



$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{G + j\omega C} = \frac{1 + (\sigma_l + j\omega)(\sigma_c + j\omega) \, . \, LC}{(\sigma_c + j\omega) \, . \, C}$$



$$Y = G + j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1 + (\sigma_l + j\omega)(\sigma_c + j\omega) \, . \, LC}{(\sigma_l + j\omega) \, . \, L}$$

fig. 5

De standaardbouwstenen, opgebouwd uit reactieve elementen met een zekere verliesmaat.

Is $\sigma_l = \sigma_c = \sigma_d$, dan kan de genormaliseerde complexe frequentiefactor worden geschreven als $\varrho_d + j\Omega$. Substitutie hiervan in de wortels van $g(p)$ levert dan: $p_i = -(\varrho_i - \varrho_d) + j\Omega_i$ voor de wortels van het nieuwe polynoom $g_1(p)$. Voor passieve vierpolen moet hierbij voldaan blijven aan de ongelijkheid $\varrho_i - \varrho_d > 0$ of $\varrho_d < \varrho_i$.

In de praktijk geldt helaas bijna nooit: $\sigma_l = \sigma_c = \sigma_d$, maar is $\sigma_c = \delta \, . \, \sigma_l = \delta \, . \, \sigma_d$ met $0 < \delta < 1$; bovendien zal men bij de synthese van het filter er naar streven het aantal spoelen ten koste van het aantal condensatoren te reduceren. Nog afgezien van de onderlinge verschillen van de verliesmaat van spoelen en, in mindere mate, van condensatoren, is het in de praktijk dus moeilijk van een exacte verliescompensatie te spreken. Een verschuiving van de wortels over een reëel bedrag $\frac{1}{2}(1 + \delta) \, . \, \sigma_d$ geeft echter een goede benadering, zodat de wortels van $g_1(p)$ dan worden:

$$p_i = -\left\{\varrho_i - \tfrac{1}{2}(1 + \delta) \, . \, \varrho_d\right\} + j\Omega_i$$

waarbij weer moet gelden: $\frac{1}{2}(1 + \delta) \, . \, \varrho_d < \varrho_i$

De grootte van het reële deel van de het dichtstbij de reële frequentie-as gelegen wortel van $g(p)$ bepaalt de maximumwaarde van ϱ_d, of m.a.w.: de minimum-kwaliteit Q_{min} van de onderdelen, waarbij intrinsieke verliescompensatie nog mogelijk is.

Het quotiënt van de geschatte kwaliteit Q van normaal verkrijgbare onderdelen en Q_{min} geeft de ontwerper een inzicht in

de te verwachten vervorming van de overdrachtskarakteristiek en verschaft hem gegevens over de „prijs" die hij moet betalen, indien hij zou besluiten tot intrinsieke verliescompensatie.*)

4.2 Voor de synthese van de vierpool als laddernetwerk is het noodzakelijk de wortels van $f(p)$ ook voor het fictieve hulpfilter met polynoom $g_1(p)$ op de reële frequentie-as te houden. De overdrachtskarakteristiek, bepaald door $10 \log \left|\frac{g_1}{f}\right|^2$ heeft uiteraard in het doorlaatgebied geen Tschebyschew-karakter meer, maar een verloop als functie van Ω als in figuur 6 is geschetst.

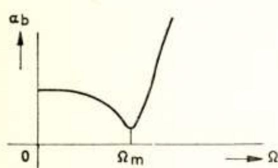


fig. 6

Een ruwe schets van de overdrachtskarakteristiek $10 \log \left|\frac{g_1}{f}\right|^2$ welke uitgangspunt voor het filterontwerp moet zijn, indien intrinsieke verliescompensatie wordt toegepast; voor $\Omega = \Omega_m$ heeft a_b een minimum.

In plaats van een aantal gelijke minima vertoont de karakteristiek nu een uitgesproken minimum voor $\Omega = \Omega_m$, waarbij $\Omega_m \approx 1$. De coëfficiënt van $\left|\frac{g_1}{f}\right|^2$ wordt nu zodanig bepaald, dat voor $\Omega = \Omega_m$ geldt:

$$a_b = 10 \log \left|\frac{g_1(\Omega_m)}{f(\Omega_m)}\right|^2 = 0 \; dB$$

zijnde de minimum-waarde voor a_b voor een fysisch realiseerbaar passief netwerk.

Hiermede wordt bereikt dat de resulterende doorlaatdemping a_p die is opgebouwd uit dissipatiedemping en reflectiedemping, zo klein mogelijk wordt gehouden. Toenemende doorlaatdemping en een daarmede gepaard gaande vergroting van de afsluitweerstand r tot $r_1 > r$ vormen een deel van de „prijs" voor intrinsieke verliescompensatie.

4.3. De oorspronkelijke vermogensbalans $1 = \left|\frac{f}{g}\right|^2 + \left|\frac{h}{g}\right|^2$ is voor het hulpfilter overgegaan in:

$$1 = \left|\frac{f}{g_1}\right|^2 + \left|\frac{h_1}{g_1}\right|^2$$

*) Voor formules, grafieken en praktische wenken wordt verwezen naar het artikel van de auteur in: Philips Telecommunication Review, 20, 1959, pp. 158-185.

Is het voor een zuiver reactief netwerk eenvoudig alle reflectie-nulpunten op de reële frequentie-as te leggen en daardoor een goede echodemping

$$a_e = 10 \log \left| \frac{g}{h} \right|^2$$

te bereiken, na toepassing van intrinsieke verliescompensatie ligt slechts één wortel van $h_1(p)$, namelijk voor $\Omega = \Omega_m$, op de reële frequentie-as; de overige wortels van $h_1(p)$ zijn complex.

De echodemping is, na realisering van het filter, aanmerkelijk verslechterd en dit nadeel vormt het andere deel van de „prijs".

Manuscript ontvangen 5 januari 1960.

De synthese van laddernetwerken die een voorgeschreven overdrachtsfunctie realiseren

door W. Milort

1. Algemene beschouwingen

Alvorens de synthese van laddernetwerken zonder wederzijdse zelfinducties, waarvan de overdrachtsfunctie Tschebyschew-eigenschappen in doorlaat- en dempingsgebied heeft, te behandelen, worden eerst enige synthese-methoden en hulpmiddelen aan de hand van eenvoudige voorbeelden besproken.

1.1. *Synthese volgens Darlington*

Zij gegeven de overdrachtsimpedantie $|z_t| = \left|\frac{u_2}{i_0}\right|$ van het als in fig. 1 geschakelde netwerk.

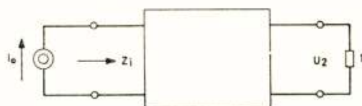


fig. 1
De stroombronschakeling van een passieve lineaire vierpool.

Is z_i de ingangsimpedantie van het gevraagde reactieve netwerk, dan is:

$$P_0 = |i_0|^2 \,.\, Re\,[z_i]$$

$$\text{en} \quad P_2 = |u_2|^2$$

Omdat voor dit passieve reactieve netwerk $P_0 = P_2$, geldt:

$$Re\,[z_i] = \left|\frac{u_2}{i_0}\right|^2 = |z_t|^2$$

Uit de gegeven overdrachtsimpedantie is dus direct de grootheid $Re\,[z_i]$ te bepalen. Deze grootheid is op zichzelf nog niet voldoende om een reactief netwerk te realiseren; daartoe is de volledige impedantie z_i nodig.

Het is duidelijk dat er in principe oneindig vele uitdrukkingen voor z_i te construeren zijn die alle hetzelfde reële deel $Re\,[z_i]$ bezitten, omdat de toevoeging van een reactantie aan z_i niet tot

het reële deel ervan bijdraagt. Deze overtollige reactantie draagt uiteraard evenmin bij tot de overdrachtsimpedantie. Het is daarom gewenst een realiseerbare *minimum-reactieve* impedantie z_i te vinden die de gevraagde $Re\,[z_i]$ bezit. Bij een minimum-reactieve impedantie ontbreken de polen op de ω-as.

Uitgaande van de wetenschap dat op de ω-as geldt:

$$Re\,[z_i(\omega)] = \tfrac{1}{2}\left\{z_i(p) + z_i(-p)\right\}_{p=j\omega}$$

kunnen we de gevraagde $z_i\,(p)$ vinden door $Re\,[z_i(-jp)]$ in partiële breuken te ontwikkelen en alle wortels in het linker halfvlak van het p-vlak toe te kennen aan $z_i\,(p)$; $z_i\,(-p)$ krijgt alle wortels in het rechterhalfvlak toegewezen.

Darlington heeft nu verder een methode ontwikkeld om vanuit $z_i\,(p)$ het netwerk op te bouwen. De behandeling van deze methode zou hier echter te ver voeren. De ontwikkeling van $z_i\,(p)$ in een ongebalanceerd laddernetwerk is slechts dan mogelijk, indien alle *nulpunten van de overdrachtsfunctie* op de ω-*as* liggen, omdat deze in een laddernetwerk alleen als nulpunten van impedanties in dwarstakken of als polen van impedanties in langstakken kunnen worden gerealiseerd.

1.1.1. Stel $|z_t|^2 = \dfrac{1}{1+\omega^6}$ (Butterworth-karakteristiek)

$$Re\,[z_i(-jp)] = \frac{1}{1+\omega^6} = \frac{1}{1-p^6} = \tfrac{1}{2}\left\{z_i(p) + z_i(-p)\right\}_{p=j\omega}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{T(p)}{(1+p)(1+p+p^2)} + \frac{T(-p)}{(1-p)(1-p+p^2)}\right\}$$

Een eenvoudige berekening leert, dat

$$T(p) = 1 + \frac{4}{3}p + \frac{2}{3}p^2$$

$$\text{Dus: } z_i(p) = \frac{3+4p+2p^2}{3(1+2p+2p^2+p^3)}$$

Realisering:

$$y_i(p) = \frac{3p^3+6p^2+6p+3}{2p^2+4p+3} = \frac{3}{2}p + \cfrac{1}{\cfrac{4}{3}p + \cfrac{1}{\tfrac{1}{2}p+1}}$$

Schema:

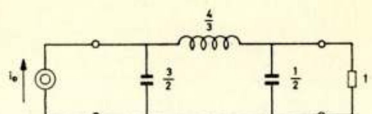


fig. 2
Het schema voor de overdrachts-impedantie

$$z_t = \frac{1}{1+2p+2p^2+p^3}$$

1.1.2. Gegeven:

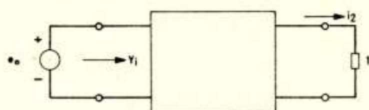


fig. 3
De spanningsbronschakeling van een passieve lineaire vierpool.

$$|y_t|^2 = \left|\frac{i_2}{e_0}\right|^2 = \frac{(1-\omega^2)^2}{1-3\omega^2+4\omega^4}$$

$$Re\,[y_i(-jp)] = \frac{(1-\omega^2)^2}{1-3\omega^2+4\omega^4} = \frac{(1+p^2)^2}{1+3p^2+4p^4} = \tfrac{1}{2}\{y_i(p)+y_i(-p)\}.$$

Nu is $1+3p^2+4p^4 = (1+2p^2)^2 - p^2 = (1+p+2p^2)(1-p+2p^2)$

Dus $Re\,[y_i(-jp)] = \frac{1}{2}\left\{\frac{T(p)}{1+p+2p^2} + \frac{T(-p)}{1-p+2p^2}\right\}$

Berekening van $T(p)$ levert: $T(p) = 1 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p^2$

Dus: $y_i(p) = \dfrac{p^2+p+2}{4p^2+2p+2}$

Schema:

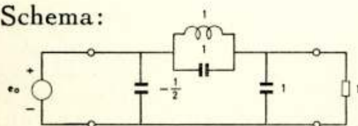


fig. 4
Het schema voor de overdrachts-admittantie

$$y_t = \frac{1+p^2}{1+p+2p^2}$$

Dit schema is erg onplezierig vanwege de condensator met de waarde $-\frac{1}{2}$ Farad. De remedie hiertegen is $y_i(p)$ te vermeerderen met een bedrag $\frac{1}{2}p$, waardoor er niets verandert aan $Re\,[y_i(\omega)]$ en aan $|y_t|^2$.

De nieuwe $y_i(p)$ is daarentegen niet meer minimum-reactief; er ligt nu een nulpunt op de ω-as, zoals

blijkt uit:

$$y_i(p) = \frac{p^2+p+2}{4p^2+2p+2} + \tfrac{1}{2}p = \frac{p^3+p^2+p+1}{2p^2+p+1} = \frac{(p+1)(p^2+1)}{2p^2+p+1}$$

en wel voor $p = \pm j$, overeenkomend met het nulpunt van y_t.

Gewijzigd schema:

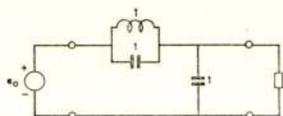


fig. 5
Het gewijzigde schema voor dezelfde overdrachts-admittantie als figuur 4.

$$y_t = \frac{p^2+1}{2p^2+p+1}$$

1.2. *Synthese volgens Cauer*

Voor de in fig. 1 gegeven situatie volgt uit de vierpoolvergelijkingen:

$$z_t = \frac{u_2}{i_0} = \frac{z_{12}}{1+z_{22}}$$

Uit de gegeven $|z_t|$ volgt z_t door substitutie van $\omega = -jp$.
De grootheid z_{22} moet een realiseerbare reactantie zijn, hetgeen impliceert dat de som van teller en noemer een Hurwitz-polynoom is en dat de teller van even graad en de noemer van oneven graad is of omgekeerd.
Omdat z_{12} en z_{22} dezelfde noemer bezitten, kunnen we schrijven:

$$z_t = \frac{T_t}{N_t} = \frac{T_{12}/N}{1+T_{22}/N} = \frac{T_{12}}{N+T_{22}}$$

Uit z_t kan dus direct $z_{22} = \dfrac{T_{22}}{N}$ worden bepaald door N_t te splitsen in een even en een oneven deel, waarbij er wel op gelet dient te worden dat $\dfrac{T_{12}}{N}$ dezelfde nulpunten heeft als $\dfrac{T_t}{N_t}$. In het algemeen moet dus N het hoogste-graadsdeel van N_t bevatten, opdat dan in ieder geval de nulpunten voor $p \to \infty$ niet vergeten worden.
De reactantie z_{22} moet weer zodanig worden gerealiseerd dat alle nulpunten van z_{12} tot hun recht komen als nulpunten van dwarstakken of als polen van langstakken.

1.2.1. Stel $z_t = \dfrac{1}{1 + 2p + p^2 + p^3} = \dfrac{1/(2p + p^3)}{1 + (1 + 2p^2)/(2p + p^3)}$

Dus $z_{22} = \dfrac{1 + 2p^2}{2p + p^3}$; de nulpunten van $z_{12} = \dfrac{1}{2p + p^3}$ worden gevormd door een drievoudig nulpunt voor $p = 0$

Realisering:

$$y_{22} = \frac{p^3 + 2p}{2p^2 + 1} = \frac{p}{2} + \cfrac{1}{\cfrac{4}{3}p + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}p}}$$

Schema: Zie fig. 2.

1.2.2. Stel $y_t = \dfrac{1 + p^2}{1 + p + 2p^2}$

De graad van de teller is in dit geval gelijk aan de graad van de noemer; er is in dit geval geen „verborgen" nulpunt voor p en de keuze van N uit N_t is nu dan ook vrij.

Om aansluiting aan 1.1.2 te verkrijgen kiezen we:

$$y_{22} = \frac{1 + 2p^2}{p} \text{ en } y_{12} = \frac{1 + p^2}{p}$$

Het te realiseren nulpunt is dus $p^2 = -1$ of $p = j$.

Realisering:

Splits van $y_{22} = \dfrac{1 + 2p^2}{p}$ een reactantie Ap af, zodanig dat

$y_{22}' = \dfrac{1 + 2p^2}{p} - Ap = \dfrac{1 + (2 - A)p^2}{p}$ een nulpunt heeft voor $p = j$

Hieruit volgt: $A = 1$. Er blijft over $z_{22}' = \dfrac{p}{1 + p^2}$

Schema: zie fig. 5.

Gevolgtrekking: De methode van Darlington berust op de synthese van een minimum-reactieve ingangsimpedantie, die van Cauer op de synthese van een reactantie, waarbij die reactantie zo „gekneed" moet worden dat alle nulpunten van de overdrachtsfunctie tot hun recht komen, maar waarbij in eerste instantie in het geheel niet wordt gelet op het al of niet minimum-reactieve karakter van de ingangs-immittantie. Dit laatste blijkt direct uit het behandelde voorbeeld: de faze van de synthese van fig. 4 wordt zonder meer overgeslagen.

1.2.3. Stel $z_t = \dfrac{(p^2+1)(p^2+2)}{8p^5+5p^4+15p^3+8p^2+6p+2}$

Hieruit volgt: $z_{22} = \dfrac{5p^4+8p^2+2}{8p^5+15p^3+6p}$; $z_{12} = \dfrac{(p^2+1)(p^2+2)}{8p^5+15p^3+6p}$

Nulpunten van z_{12}: $p = j$, $p = j\sqrt{2}$ en $p \to \infty$

De reactantie z_{22} heeft nulpunten voor: $p = 0.56j$, $p = 1.135j$ en $p \to \infty$ en polen voor: $p = 0$, $p = 0{,}76j$ en $p = 1{,}14j$.
Nulpunten en polen van z_{22} zijn enkelvoudig en wisselen elkaar af, dus z_{22} is inderdaad een realiseerbare reactantie.
Geen enkele wortel van z_{22} valt echter samen met een nulpunt van z_{12}, zodat z_{22} „gekneed" moet worden. Dit is op meerdere manieren mogelijk, zoals uit het onderstaande zal blijken.

a): Uitgaande van y_{22}, splitsen we een reactantie pA af, zodanig dat de restadmittantie een nulpunt heeft dat samenvalt met een nulpunt van z_{12}.

$$y_{22} = \left\{\frac{(8-5A)p^5+(15-8A)p^3+(6-2A)p}{5p^4+8p^2+2}\right\}_{p=j\sqrt{2}} = 0$$

Hieruit volgt: $A = \dfrac{4}{3}$

$$z_{22}' = \frac{1}{y_{22}'} = \frac{5p^4+8p^2+2}{1/3\,p(4p^2+5)(p^2+2)}$$

Realiseer nu de pool van z_{22}' voor $p = j\sqrt{2}$: $\dfrac{Bp}{p^2+2}$

$$z_{22}' = \left\{\frac{\left(5-\frac{4}{3}B\right)p^4+\left(8-\frac{5}{3}B\right)p^2+2}{\frac{1}{3}p\,(4p^2+5)(p^2+2)}\right\}_{p=j\sqrt{2}} = 0$$

Oplossing: $B = 3$.
De teller wordt nu: $p^4+3p^2+2 = (p^2+1)(p^2+2)$
De factor p^2+2 komt nu in teller en noemer voor en wordt uitgedeeld.

$$z_{22}'' = \frac{3(p^2+1)}{p\,(4p^2+5)}$$

Toevalligerwijze bevat z_{22}'' een nulpunt dat samenvalt met een nog niet gerealiseerd nulpunt van z_{12}. Zonder voorbereiding wordt dit nulpunt „afgesplitst" als nulpunt van een dwarstak.

$$y_{22}''' = \left\{\frac{p\,(4p^2+5)}{3\,(p^2+1)} - \frac{Dp}{p^2+1}\right\}_{p=j} = \left\{\frac{4p^3+(5-3D)p}{3\,(p^2+1)}\right\}_{p=j} = 0$$

Hieraan voldoet $D = \frac{1}{3}$.

De restadmittantie $y_{22}''' = \frac{4}{3}p$ vormt het nulpunt van z_{12} voor $p \to \infty$

Schema:

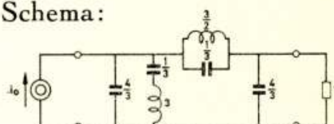


fig. 6

Realisering van de overdrachtsimpedantie

$$z_t = \frac{(p^2+1).(p^2+2)}{8p^5+5p^4+15p^3+8p^2+6p+2}$$

Methode a.

b): Een andere mogelijkheid is eerst het nulpunt $p = j$ (indien mogelijk!) te realiseren, vervolgens het nulpunt $p = j\sqrt{2}$ en tenslotte dat voor $p \to \infty$. Deze volgorde is inderdaad mogelijk en levert het volgende schema:

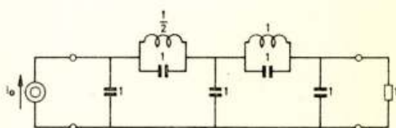


fig. 7

Als voor fig. 6. Methode b.

c): Ook de volgorde $p \to \infty$, $p = j$ en $p = j\sqrt{2}$ leidt tot een laddernetwerk zonder negatieve elementen.

Schema:

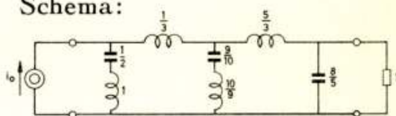


fig. 8

Als voor fig. 6. Methode c.

d): Tenslotte nog een vierde mogelijkheid: de volgorde $p = j$, $p \to \infty$ en $p = j\sqrt{2}$

Schema:

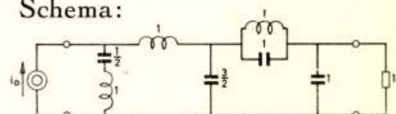


fig. 9

Als voor fig. 6. Methode d.

Opmerking: de ingangsimpedantie van de schema's 6 t/m 9 zijn alle verschillend; die van de schema's 8 en 9 zijn niet minimum-reactief.

1.3. *Aanschouwelijke voorstelling van de synthese van netwerken volgens Cauer: het polen-nulpunten-diagram.*

1.3.1. Elke reactantie kan worden geschreven als een polynoom van partiële breuken:

$$z = \frac{A_0}{p} + \sum_{1}^{n} i \frac{A_i}{\Omega_i^2 + p^2} + A_\infty . p \quad \text{met } p = j\Omega$$

Hierin zijn de coëfficiënten A_0, A_i en A_∞ positief of nul. Wordt nu een deelreactantie afgesplitst, zodanig dat z' een realiseerbare reactantie blijft, dan moeten de nieuwe coëfficiënten A_0', A_i' en A_∞' eveneens positief of nul zijn. Is het residu van de afgesplitste deelreactantie resp. A_0, A_i of A_∞, dan is van de oorspronkelijke reactantie z een *volledige pool* afgesplitst bij de frequentie resp. $\Omega = 0$, $\Omega = \Omega_i$ of $\Omega \rightarrow \infty$. De betreffende coefficiënten zijn in de restreactantie z' niet meer aanwezig. Is het residu kleiner dan de oorspronkelijke waarde, dan spreekt men van een *onvolledig* afgesplitste pool. De restreactantie z bevat dan nog de betreffende pool met een restresidu A_0', A_i' of A_∞'.

Het afsplitsen van een pool met een residu, groter dan in het oorspronkelijke reactantie z voorkomende residu, leidt tot een restreactantie z' met een *negatief residu* voor die betreffende pool. Dit is ontoelaatbaar, indien men een reactantie-ontwikkeling met positieve elementen verlangt.

Door toepassing van gekoppelde spoelen met wederzijdse zelfinductie is het soms mogelijk overmatige afsplitsing van een pool van een reactantie in de ladderontwikkeling te realiseren; aanbevelenswaardig is het niet.

1.3.2. De voorstelling van een reactantie door een polynoom van partiële breuken vertelt alles over de polen, maar weinig of niets over de *nulpunten*. Zeker is dat alle nulpunten worden afgewisseld door de polen. De berekening van de nulpunten kan geschieden door het polynoom van partiële breuken om te zetten in een rationele breuk en daarvan de wortels van de teller te bepalen. De noemer van de rationele breuk zal na afsplitsing van een *onvolledige pool* ongewijzigd blijven (alle polen zijn nog aanwezig!).

De teller daarentegen ondergaat een wijziging; alle nulpunten verschuiven in de richting van de onvolledig afgesplitste pool,

zij worden als het ware naar de pool gezogen. Door een geschikte keuze van de poolfrequentie en van de grootte van het residu is het dus mogelijk één of meerdere nulpunten naar gewenste frequenties te verschuiven.

Op dit principe van *nulpuntenverschuiving* berust de ladderontwikkeling voor de filtersynthese.

De *volledige* afsplitsing van een pool impliceert dat teller en noemer beide dezelfde frequentiefactor $\Omega_i^2 + p^2$ moeten bezitten, zodat na uitdeling van deze factor teller en noemer in gelijke mate in graad worden verlaagd. Eén van de verschoven nulpunten (het dichtstbij gelegen nulpunt) heeft zich met de afgesplitste pool verenigd; het aan de andere zijde gelegen nulpunt verschuift eventueel tot in de directe omgeving van de poolfrequentie.

1.3.3. De „grafische" voorstelling van een reactantie bestaat uit de verzameling nulpunten en polen langs de frequentie-as. De frequentie ∞ wordt als eindige frequentie weergegeven, een nulpunt als een nul, een pool als een kruis $\times$; ter onderscheiding van de „dubbele" nulpunten en polen bij eindige frequenties (pos. en neg. frequenties) worden de nulpunten en polen bij de frequenties 0 en ∞ weergegeven door halve nullen en halve kruisen. De afsplitsing van een volledige pool wordt aangegeven door een onderstreept kruis.

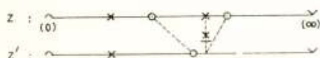


fig. 10
Voorbeeld 1: de afsplitsing van een volledige pool.

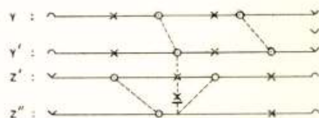


fig. 11
Voorbeeld 2: de voorbereiding tot en de daarop volgende afsplitsing van een volledige pool.

Een dergelijke aanschouwelijke voorstelling noemt men wel *het polen-nulpunten-diagram*.

1.3.4. Toepassing op het in 1.2.3. behandelde voorbeeld.
De nulpunten van de overdrachtsimmittantie zijn de dempingspolen van het gevraagde netwerk. Zij worden eveneens met hele of halve kruisen aangegeven.

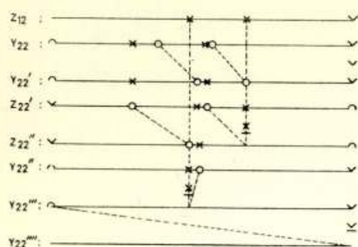


fig. 12
Het polen-nulpunten diagram voor het schema van figuur 6.

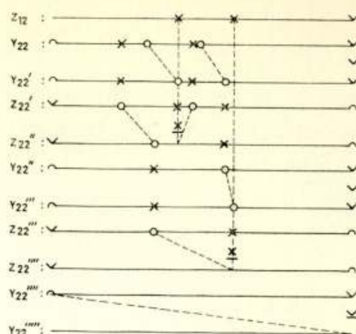


fig. 13
Het polen-nulpunten diagram voor het schema van figuur 7.

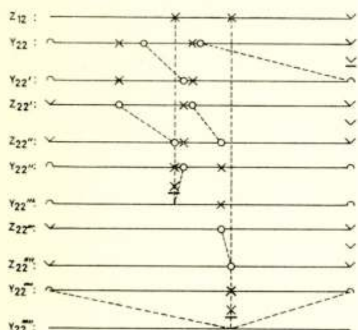


fig. 14
Het polen-nulpunten diagram voor het schema van figuur 8.

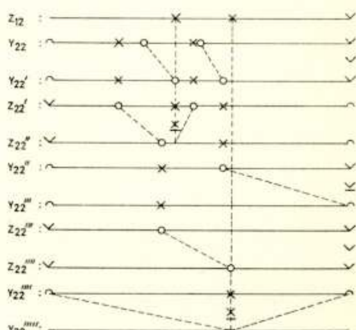


fig. 15
Het polen-nulpunten diagram voor het schema van figuur 9.

1.4. *Integratie van de methoden van Darlington en Cauer in het polen-nulpunten-diagram.*

De vorige paragrafen hebben duidelijk gemaakt dat de synthese van filters (of passieve netwerken in het algemeen) volgens Cauer een aantrekkelijke methode is en te verkiezen boven de methode volgens Darlington. De aanschouwelijke voorstelling van het synthese-proces met behulp van polen-nulpunten-diagrammen biedt de ontwerper een goede steun.

De Darlington-procedure geeft ons echter een beter inzicht in het begrip minimum-reactieve ingangsimmitantie, zoals is gebleken bij het in 1.1.2. en 1.2.2. behandelde voorbeeld.

Een niet-minimum-reactieve ingangsimmittantie ontstaat in die gevallen, waarbij onvolledig afgesplitste polen, de z.g. voorbe-

reidingspolen, tenslotte niet als volledige polen van het netwerk worden verwerkt en dus geen bijdrage tot de overdrachtsimmittantie leveren. Deze eigenschap van de ingangsimmittantie is nu direct uit het polen-nulpunten-diagram af te lezen!

Nadat b.v. in 1.3.4. in fig. 14 en 15 de pool voor $\Omega \to \infty$ volledig is gerealiseerd, is vervolgens bij dezelfde frequentie het proces van onvolledige pool-afsplitsing als voorbereiding toegepast. Er is tenslotte echter geen tweede volledige pool bij $\Omega \to \infty$ afgesplitst, omdat de overdrachtsimmittantie geen tweevoudig nulpunt (tweevoudige dempingspool) bij $\Omega \to \infty$ bezat. De ingangsimmittanties van de netwerken in fig. 8 en 9 zijn daarom niet-minimum-reactief. De lezer kan voor zichzelf nagaan dat iets dergelijks plaatsvindt bij de synthese van het in 1.1.2. en 1.2.2. behandelde netwerk. Het polen-nulpunten-diagram is dus een bij uitstek geschikt hulpmiddel.

2. Filters met Tschebyschew-eigenschappen in de overdrachtskarakteristiek.

Voor de dimensionering van vierpolen, geschakeld tussen een spanningsbron met genormaliseerde inwendige weerstand $R_1 = 1$ en een genormaliseerde belastingsweerstand $R_2 = r$, zijn als vierpoolparameters de polynomen f, g en h en als vierpoolfuncties de rationele breuken $\frac{f}{g}$ (overdrachtsfunctie), $\frac{h}{g}$ (reflectiefunctie) en $\frac{h}{f}$ (karakteristieke functie) ingevoerd. De overdrachtsfunctie is daarbij zodanig bepaald dat de bedrijfsdemping

$$a_b = 10 \log \left|\frac{g}{f}\right|^2 = 10 \log \left\{ 1 + \left|\frac{h}{f}\right|^2 \right\}$$

Tschebyschew-eigenschappen vertoont.

Op analoge wijze kan aan de echodemping $a_e = 10 \log \left|\frac{g}{h}\right|^2$ in het doorlaatgebied een Tschebyschew-karakter worden gegeven.*)

2.1. *De immittantie-matrices.*

De elementen van de immittantie-matrices kunnen als volgt in de polynoom f, g en h worden uitgedrukt:

*) Zie hiervoor het eerste artikel van de auteur en het artikel van ir. A. Fettweis, elders in dit nummer.

Uit $2g\sqrt{r} = (ar + d) + (cr + b)$
$2h\sqrt{r} = (ar - d) - (cr - b)$
en de betrekking $ad - bc = f^2$ ($|K| = 1$)

volgt voor: f *even* : $a = \frac{1}{\sqrt{r}} . (g_e + h_e)$, $b = (g_o + h_o) . \sqrt{r}$

$$c = \frac{1}{\sqrt{r}} . (g_o - h_o), \quad d = (g_e - h_e) . \sqrt{r}$$

f *oneven*: $a = \frac{1}{\sqrt{r}} . (g_o + h_o)$, $b = (g_e + h_e) . \sqrt{r}$

$$c = \frac{1}{\sqrt{r}} . (g_e - h_e), \quad d = (g_o - h_o) . \sqrt{r}$$

Met behulp hiervan vinden we voor de elementen:

	f *even*	f *oneven*
$z_{11} = z_{1n} = \frac{1}{y_{1n}} = \frac{a}{c} =$	$\frac{g_e + h_e}{g_o - h_o}$	$\frac{g_o + h_o}{g_e - h_e}$
$z_{22} = z_{2n} = \frac{1}{y_{2n}} = \frac{d}{c} =$	$\frac{g_e - h_e}{g_o - h_o} r$	$\frac{g_o - h_o}{g_e - h_e} r$
$z_{12} = \frac{f}{c} =$	$\frac{f}{g_o - h_o} \sqrt{r}$	$\frac{f}{g_e - h_e} \sqrt{r}$
$y_{11} = y_{1k} = \frac{1}{z_{1k}} = \frac{d}{b} =$	$\frac{g_e - h_e}{g_o + h_o}$	$\frac{g_o - h_o}{g_e + h_e}$
$y_{22} = y_{2k} = \frac{1}{z_{2k}} = \frac{a}{b} =$	$\frac{1}{r} . \frac{g_e + h_e}{g_o + h_o}$	$\frac{1}{r} . \frac{g_o + h_o}{g_e + h_e}$
$y_{12} = \frac{f}{b} =$	$\frac{1}{\sqrt{r}} . \frac{f}{g_o + h_o}$	$\frac{1}{\sqrt{r}} . \frac{f}{g_e + h_e}$

De index e refereert aan het even deel van het polynoom g of h, de index o aan het oneven deel.

2.2. *Ligging van reflectienulpunten.*

De eigenresonantiefrequenties, wortels van $g(p)$, liggen alle in het negatieve halfvlak; de reflectienulpunten daarentegen kennen alleen de beperking dat zij in toegevoegd complexe paren moeten voorkomen. Welke wortels van de functie $h(p) . h(-p)$ voor $h(p)$ en welke voor $h(-p)$ zullen gereserveerd, ligt dus niet

a priori voor de ontwerper vast. De keuze kan echter wel door bepaalde overwegingen worden geleid, terwijl er in sommige gevallen geen sprake is van een keuze. Speelt b.v. de echodemping in het doorlaatgebied een belangrijke rol, dan zal men er naar streven de reflectienulpunten op de reële frequentie-as te leggen, hetgeen impliceert dat ook de genormaliseerde belastingweerstand $r = 1$ wordt gekozen (afgezien van mogelijke impedantie-transformaties in bandfilters); er is dan geen keuze!

Is de inwendige weerstand van de spanningsbron gelijk aan nul, dan ligt er geen enkele wortel van $h(p) \cdot h(-p)$ op de reële frequentie-as voor minimum-reactieve ingangsimmittanties; zij vallen dan nl. samen met de wortels van $g(p) \cdot g(-p)$. De wortels voor $h(p)$ moeten dan zodanig worden gekozen dat de uitdrukking voor de immittantie, met behulp waarvan de filtersynthese tot stand moet komen, de juiste graad blijft behouden! In alle gevallen bereikt men uitdrukkingen van de vorm g_e/g_o of omgekeerd.

Liggen nl. alle wortels van $h(p)$ in het linkerhalfvlak, dan zijn alle coëfficiënten positief of negatief, afhankelijk van het vrij te kiezen voorteken; liggen alle wortels in het rechterhalfvlak, dan alterneren de tekens van de coëfficiënten, zodat h_e een teken heeft, tegengesteld aan dat van h_o.

Een analoge beschouwing geldt voor die gevallen, waarbij $r \to \infty$ wordt (secundair nullast).

De in 1.2 en 1.3 besproken netwerken behoren tot deze gevallen, waarin dus de wortels van $h(p)$ eigenlijk overbodig zijn.

Het uitgangspunt voor de filtersynthese (z_{22} of y_{22}) is het quotient $\frac{g_e}{g_o}$ of $\frac{g_o}{g_e}$, waarbij de som van teller en noemer een Hurwitz-polynoom is.

In alle overige gevallen — in het algemeen zijn dit de ontwerpen, waarbij intrinsieke verliescompensatie wordt toegepast — kan de keuze van de wortels voor $h(p)$ worden geleid door de overweging de coëfficiënten in teller en noemer zo groot mogelijk te houden, vanwege de rekennauwkeurigheid in het afsplitsingsproces. Dit standpunt impliceert dat altijd de (positieve) coëfficiënten bij elkaar opgeteld worden.

2.3. *Afhankelijkheid van de vierpoolafsluiting*

De definitie van *bedrijfsdemping* is gebaseerd op de vergelijking van het maximum af te geven *vermogen* door de bron tot het

aan de belastingsweerstand afgegeven *vermogen*, hetgeen impliceert dat de vierpool aan beide zijden moet zijn afgesloten met een eindige, van nul verschillende, impedantie (in het algemeen een weerstand).

Voor éénzijdig belaste vierpolen is echter geen sprake meer van de verhouding van twee vermogens en ontaardt de bedrijfsdemping in *spannings-* (c.q. *stroom*)*demping*.

De consequentie van een en ander voor de synthese van de vierpool is dat voor een tweezijdig belaste vierpool de ingangsimmittantie *minimum-reactief* moet zijn. Zoals reeds eerder is gebleken, is dit in principe voor éénzijdig belaste vierpolen niet noodzakelijk. Het aantal polen-nulpunten-diagrammen voor de synthese van tweezijdig belaste filters wordt hierdoor aanzienlijk beperkt (paragraaf 1.4.). Miskenning hiervan in de syntheseprocedure leidt tot de introductie van extra dempingspolen (en dienovereenkomstig tot extra eigenresonanties en reflectienulpunten), zodat de uiteindelijk verkregen overdrachtskarakteristiek niet identiek is met de gewenste en verwachte karakteristiek.

2.4. *Laagdoorlaatfilters*

Voor laagdoorlaatfilters is f altijd een *even* polynoom; de hoogste graad van de polynomen g en h kan zowel even als oneven zijn. In het eerste geval heeft de overdrachtsfunctie geen nulpunt bij $\Omega \rightarrow \infty$, in het tweede geval wel (graad van g en h is één hoger dan graad van f). Om nu een tweezijdig belast laagdoorlaatfilter te kunnen ontwikkelen in een laddernetwerk zonder gekoppelde spoelen, is het noodzakelijk dat de overdrachtsfunctie een nulpunt bij $\Omega \rightarrow \infty$ heeft.

Van de reactantie kan dan telkens een zodanig bedrag van de pool bij $\Omega \rightarrow \infty$ worden afgesplitst dat alle polen bij eindige frequenties successievelijk kunnen worden gerealiseerd. Het restresidu van de „voorbereidingspool" vormt dan tenslotte de dempingspool bij oneindige frequentie.

De ingangsimmittantie is minimum-reactief. De hoogste graad is *oneven*.

Schema prototype voor n oneven:*)

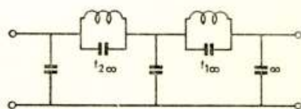


fig. 16
Prototype voor een laagdoorlaatfilter van oneven graad ($n = 5$).

*) Het bij elk prototype-schema behorende duale schema, waarin het aantal spoelen domineert, wordt niet gegeven. De lezer kan dit zelf eenvoudig afleiden.

Voor éénzijdig belaste filters mag de hoogste graad zowel *even* als *oneven* zijn.

Schema prototype voor n even:

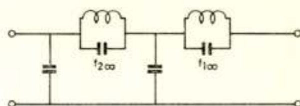


fig. 17
Prototype voor een eenzijdig belast laagdoorlaatfilter van even graad ($n = 4$).

Schema, equivalent aan prototype voor n oneven:

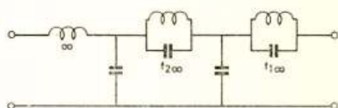


fig. 18
Prototype voor een eenzijdig belast laagdoorlaatfilter van oneven graad ($n = 5$).

2.4.1. Toepassing van *intrinsieke verliescompensatie* leidt soms tot een zeer hoge genormaliseerde belastingsweerstand $r (r \gg 1)$.

In die gevallen kan bij benadering van een éénzijdig belaste vierpool worden gesproken, zodat dan in de praktijk zowel even als oneven n kan worden toegepast.

2.4.2. Filters met zeer steile flanken moeten soms uit twee *„deelfilters"* worden opgebouwd om verliescompensatie te kunnen toepassen met behoud van een eindige, niet te grote, r. Dit gaat uiteraard ten koste van *extra elementen*, want de totale graad $n_1 + n_2$ overschrijdt de oorspronkelijke graad n.

Zijn de deelgraden beide oneven, dan heeft het filter een tweevoudige dempingspool bij $\Omega \rightarrow \infty$.

Schema:

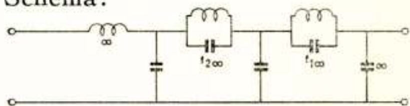


fig. 19
Prototype voor een samengesteld laagdoorlaatfilter van even graad ($n = 6$) met een dubbelpool bij oneindige frequentie.

Is een van de deelgraden even dan ontstaat het schema van fig. 16.

2.4.3. Is *echodemping* in het doorlaatgebied belangrijker dan intrinsieke verliescompensatie, dan kunnen filters met even n eerst na een kleine ingreep in de gewenste laddervorm worden

ontwikkeld. Daartoe past men een zodanige *frequentie-transformatie* toe op het dempingsgebied, dat de (tweevoudige) dempingspool bij de hoogste eindige frequentie verschuift naar oneindige frequentie.

Het schema van fig. 19 is dan weer toe te passen.

Hierbij kunnen nog twee verschillende gevallen worden onderscheiden:

a. Op het doorlaatgebied wordt geen frequentie-transformatie toegepast; de beide afsluitweerstanden zijn dan principiëel ongelijk ($r \neq 1$).

b. Op het doorlaatgebied wordt een zodanige frequentie-transformatie toegepast dat het (tweevoudige) reflectienulpunt bij de laagste eindige frequentie naar de frequentie nul verschuift; de beide afsluitweerstanden zijn dan principiëel gelijk ($r = 1$).

Opmerking: In beide gevallen verandert de frequentie-ruimte $1 < \Omega < 1/k$, de snijruimte, zodat hiermede bij het ontwerp rekening moet worden gehouden.

2.5. *Bandfilters*

Voor bandfilters kan het polynoom f zowel oneven als even zijn, afhankelijk van het feit of het filter dempingspolen bij $\Omega = 0$ en $\Omega \to \infty$ heeft of niet. De hoogste graad van de polynomen g en h is altijd even. Vindt de synthese van het bandfilter plaats met behulp van een frequentie-transformatie vanuit een laagdoorlaatequivalent, dan zijn de schema's eenvoudig uit die voor laagdoorlaatfilters af te leiden.

Schema prototype (transformatie van fig. 16):

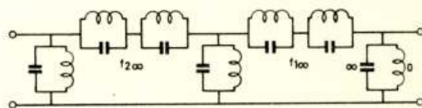


fig. 20
Prototype voor een bandfilter, getransformeerd uit het laagdoorlaatfilter volgens figuur 16.

Het overwicht aan condensatoren in het laagdoorlaatequivalent gaat door deze transformatie verloren.

Het is mogelijk dit praktisch voordeel te herstellen door uit te gaan van het bandfilter zelf en dit bandfilter op te vatten als een logische combinatie van *laagdoorlaat- en hoogdoorlaatfilter*.

Door afwisselend voorbereidingen te treffen bij de reactantiepolen voor $\Omega = 0$ resp. $\Omega \to \infty$ kan een ladderfilter worden verkregen, waarin het aantal condensatoren weer domineert. Dit type schema's noemt men wel in de filterliteratuur: *zig-zag-schema's*.

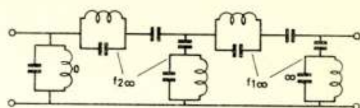


fig. 21
Prototype voor een eenzijdig belast bandfilter volgens het zig-zag-principe; de graad is dezelfde als van het prototype volgens fig. 20.

Het equivalente schema van fig. 20 is dan echter — men herinnere zich de redenen — niet meer geschikt voor tweezijdig afgesloten filters!

Opmerking: De tweepool in de dwarstak, bestaande uit een serie-schakeling van condensator en parallelkring, is oorspronkelijk een parallelschakeling van condensator en serie-kring, waarbij de condensator de „voorbereiding" betekent voor de dempingspool in de erop volgende langstak; in de laatste dwarstak stelt deze condensator de dempingspool bij oneindige frequenties voor.

Voor tweezijdig afgesloten vierpolen moeten voor dit zig-zag-proces *tweevoudige dempingspolen* bij de frequenties $\Omega = 0$ en $\Omega \to \infty$ aanwezig zijn (volgens 2.4.2. of 2.4.3.).

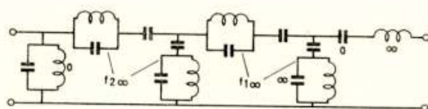


fig. 22
Prototype voor een bandfilter volgens het zig-zag-principe met dubbelpolen bij de frequentie nul en bij oneindige frequentie; de graad is nu twee hoger dan van de prototypes volgens de figuren 20 en 21.

2.6. *Slotopmerkingen*

Hoogdoorlaatfilters kunnen op dezelfde wijze worden behandeld als laagdoorlaatfilters.

Bandstopfilters daarentegen kunnen alleen via een frequentietransformatie uit een laagdoorlaat- of een hoogdoorlaatequivalent worden verkregen, omdat hierbij geen „voorbereidingspolen" bij de frequenties $\Omega = 0$ en $\Omega \to \infty$ aanwezig zijn.

Filters waarvan de overdrachtskarakteristiek in beide frequentie-gebieden Tschebyschew-eigenschappen bezit, kunnen altijd de synthese-procedure voor ladderontwikkeling ondergaan zonder vrees voor negatieve elementen. Het is daarbij wel gewenst het polen-nulpunten-diagram zo toe te passen dat de dempingspolen in vaste volgorde, nl. van de hoogste eindige frequentie naar de laagste voor laagdoorlaatfilters en dienovereenkomstig voor de andere filters, worden gerealiseerd. Op deze wijze is de procedure tevens eenvoudig geschikt te maken voor de programmering van elektronische machines. *)

Vertoont de overdrachtskarakteristiek van het filter alleen in het doorlaatgebied Tschebyschew-eigenschappen, dan bestaat de mogelijkheid dat meerdere polen-nulpunten-diagrammen moeten worden geprobeerd om negatieve elementen te vermijden. **)

Manuscript ontvangen 21 januari 1960.

*) Zie voor deze en andere praktische punten het artikel van de auteur in Philips Telecommunication Review, 20, 1959, pp. 158-185.

**) Zie hiervoor het artikel van ir A. Fettweis, elders in dit nummer.

Filters met willekeurig gekozen dempingspolen en Tschebyschewkarakteristiek in het doorlaatgebied

door A. Fettweis *)

1. Inleiding

In de vorige lezingen [1-4]) hebben wij enerzijds polynoomfilters met Taylor-Butterworth karakteristiek en polynoomfilters met Tschebyschew karakteristiek (filters met Tschebyschew I karakteristiek) leren kennen en anderzijds filters waarvan de dempingskromme zowel in het spergebied als in het doorlaatgebied een Tschebyschew verloop heeft (filters met Tschebyschew II karakteristiek). Voor de praktijk zijn echter nog andere meer algemene types van filters van groot belang, namelijk deze, die bij willekeurige ligging van de dempingspolen een doorlaatgebied hebben met Tschebyschew karakteristiek (filters met Tschebyschew III karakteristiek). De figuren 1.1 - 1.3 geven voorbeelden van dergelijke filterkarakteristieken. Hieruit is duidelijk te zien dat voor de aangegeven gevallen op een eenvoudiger manier aan de gestelde filtereisen kan voldaan worden dan dit m.b.v. de eerst besproken filters het geval is. In fig. 1.1 geven we b.v. een laagdoorlatendfilter van het hier te bespreken type (dikke lijn) in vergelijking met een filter met Tschebyschew II karakteristiek (streeplijn). Het tweede filter heeft een dempingspool meer nodig dan het eerste om aan de dempingseisen te kunnen voldoen.

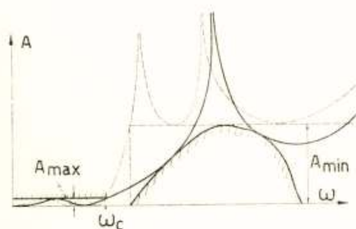


fig. 1.1
Laagdoorlatendfilter met Tschebyschew III karakteristiek in vergelijking met een filter met Tschebyschew II karakteristiek voor gelijke dempingseisen.

Andere typische gevallen zijn gegeven in fig. 1.2 (laagdoor-

*) Bell Tel. Mfg. Company, Antwerpen.

latendfilter met hoge dempingseisen in een smal frequentiegebied) en fig. 1.3 (banddoorlatendfilter met asymmetrische dempingskarakteristiek).

De hier te bespreken filters werden reeds behandeld door Darlington in zijn beroemde thesis [5]). Ze worden verder behandeld door Saraga [6]), Rumpelt [7]), Belevitch [8,9]), Cauer [10]), Fetzer [11,12]), Saal en Ulbrich [13]), Fromageot [14]). In de hier volgende lezing geven we een volledig overzicht van het vraagstuk waarin ook enkele originele resultaten zijn vervat. Hierbij zullen wij ons beperken tot zuiver reactieve vierpolen d.w.z. dat we alle spoelen en condensatoren als verliesvrij beschouwen. De zogenaamde predistorsiemethode zal eerst aan het einde kort worden bediscussieerd.

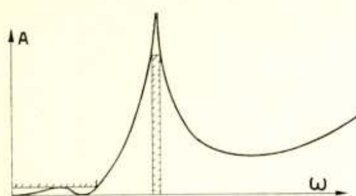


fig. 1.2
Voorbeeld van een laagdoorlatendfilter dat door toepassing van een Tschebyschew III karakteristiek op eenvoudige wijze aan hoge dempingseisen in een smal frequentiegebied voldoet.

Wat de te behandelen filtertypes betreft, zullen wij ons in deze lezing uitsluitend tot laag- en banddoorlatendefilters beperken. Zoals bekend kunnen o.a. hoogdoorlatende- en frequentiesymmetrische bandsperfilters door eenvoudige frequentietransformaties uit laagdoorlatendefilters afgeleid worden. Hetzelfde geldt ook voor frequentiesymmetrische banddoorlatendefilters die dus best m.b.v. het equivalente laagdoorlatendefilter en niet door toepassing van de algemene theorie der banddoorlatendefilters berekend worden.

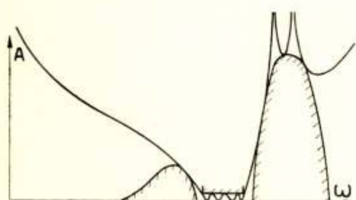


fig. 1.3
Frequentie-onsymmetrisch banddoorlatendfilter met Tschebyschew III karakteristiek.

2. Grondbegrippen

Vooraleer het eigenlijke onderwerp aan te snijden zullen wij kort de grondbegrippen van de theorie der zuiver reactieve vierpolen herhalen waarbij we gebruik maken van de door Belevitch in de theorie der vierpolen ingevoerde "verstrooiingsmatrix" (scattering matrix, matrice de répartition, Streumatrix), [15-18]).

Beschouwen wij b.v. de zuiver reactieve richtingssymmetrische vierpool van fig. 2.1 *a* met zijn afsluitweerstanden R_1 en R_2 en de ideale spanningsbron E. De spanningen en stromen aan de ingangs- en uitgangsklemmen noemen wij respectievelijk V_1, V_2; I_1 en I_2; ze zijn positief in de door de pijlen aangegeven richtingen. Zij verder Z_1 de ingangs- en Z_2 de uitgangsimpedantie van de vierpool; Z_{11}, Z_{22} en Z_{12} de elementen van zijn impedantiematrix; Y_{11}, Y_{22} en Y_{12} de elementen van zijn admittantiematrix en A, B, C en D de elementen van zijn kettingmatrix. Terwille van de eenvoud van de berekeningen voeren we de volgende genormaliseerde parameters in:

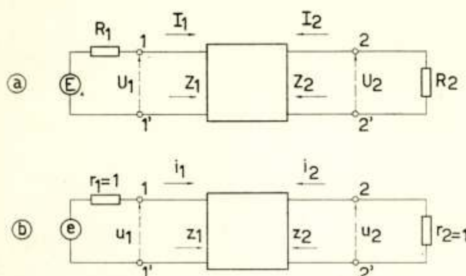


fig. 2.1

a) Schakeling van een vierpool tussen een spanningsbron E met inwendige weerstand R_1 en en belastingsweerstand R_2.

b) Schakeling identiek met de vorige waarbij alle parameters door genormaliseerde parameters zijn vervangen.

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{U_1}{\sqrt{R_1}} & i_1 &= \sqrt{R_1}\, I_1 & e &= \frac{E}{\sqrt{R_1}} \\ u_2 &= \frac{U_2}{\sqrt{R_2}} & i_2 &= \sqrt{R_2}\, I_2 & & \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

$$\left.\begin{aligned} z_{11} &= \frac{Z_{11}}{R_1} & z_{22} &= \frac{Z_{22}}{R_2} & z_{12} &= \frac{Z_{12}}{\sqrt{R_1 R_2}} \\ y_{11} &= Y_{11}\, R_1 & y_{22} &= Y_{22}\, R_2 & y_{12} &= Y_{12}\sqrt{R_1 R_2} \\ z_1 &= \frac{Z_1}{R_1} & a &= A\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} & c &= C\sqrt{R_1 R_2} \\ z_2 &= \frac{Z_2}{R_2} & b &= \frac{B}{\sqrt{R_1 R_2}} & d &= D\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Hierdoor wordt een unieke genormaliseerde vierpool bepaald, afgesloten op de weerstanden $r_1 = r_2 = 1$ en gevoed door de spanningsbron e (fig. 2.1 *b*).

Zij nu S_{11} de reflectiecoëfficiënt aan de ingang, S_{22} de reflectiecoëfficiënt aan de uitgang en S_{12} de transmissiecoëfficiënt. Wij hebben

$$\left.\begin{aligned} S_{11} &= \frac{Z_1 - R_1}{Z_1 + R_1} = \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1} && \text{(a)} \\ S_{22} &= \frac{Z_2 - R_2}{Z_2 + R_2} = \frac{z_2 - 1}{z_2 + 1} && \text{(b)} \\ S_{12} &= \frac{2U_2}{E}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \frac{2\,u_2}{e} = e^{-\Gamma} = e^{-A-jB} && \text{(c)} \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

waarin A de bedrijfsdemping en B de bedrijfsfase is*).

Met behulp van deze coëfficiënten, die alle evenals de elementen van de impedantie-, admittantie- en kettingmatrix reële rationale functies (d.w.z. rationale functies met reële coëfficiënten) zijn van de complexe frequentie $p = j\omega$, kunnen wij nu een vierkante matrix, de hierboven gemelde verstrooiingsmatrix S vormen.

$$S = \begin{Vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{Vmatrix} \tag{2.4}$$

Er bestaat een interessante analogie tussen de reflectiecoëfficiënt s van een impedantie z $\left(\text{admittantie } y = \frac{1}{z}\right)$ en de verstrooiingsmatrix S van een vierpool. Noemen we Z en Y respectievelijk de genormaliseerde impedantie- en admittantiematrix van de vierpool, d.w.z.

$$\left.\begin{aligned} Z &= \begin{Vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{Vmatrix} \\ \text{en} \qquad & \\ Y &= \begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{12} & y_{22} \end{Vmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

dan kan men bewijzen dat

$$\left.\begin{aligned} S &= (Z + E_2)^{-1}\,(Z - E_2) \\ Z &= (E_2 - S)^{-1}\,(E_2 + S) \\ \text{en} \qquad & \\ Y &= (E_2 + S)^{-1}\,(E_2 - S) \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

*) Deze coëfficiënten A en B mogen niet met de in (2.1) gebruikte elementen van de kettingmatrix verward worden.

waar

$$E_2 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

de eenheidsmatrix is van de tweede orde.

Deze betrekkingen zijn volledig analoog met de volgende welbekende uitdrukkingen

$$s = \frac{z-1}{z+1} = (z+1)^{-1}(z-1)$$

$$z = \frac{1+s}{1-s} = (1-s)^{-1}(1+s)$$

$$y = \frac{1-s}{1+s} = (1+s)^{-1}(1-s)$$

Men bewijst nu dat de door een vierpool met verstrooiingsmatrix S geabsorbeerde actieve energie W_a wordt gegeven door

$$4\,W_a = x'^{*}\,(E_2 - S^{*}S)\,x$$

waarin

$$x = \left\| \begin{matrix} v_1 + i_1 \\ v_2 + i_2 \end{matrix} \right\|$$

en

$$x' = \| \, v_1 + i_1 \, , \; v_2 + i_2 \, \|$$

x is dus een matrix met één kolom (vector) en x' de getransponeerde matrix van x; E_2 is de hierboven gedefinieerde eenheidsmatrix van de tweede orde. Verder is S^* de toegevoegd-complexe matrix van S d.w.z. de matrix waarvan de elementen de toegevoegd complexe waarden zijn van de overeenkomstige elementen van S. Deze matrix S^* is dus ook diegene, die uit S ontstaat als we hierin p door de toegevoegde complexe waarde p^* vervangen, want alle elementen van S zijn reële rationale breuken in p; dus $S^* = S\,(p^*)$.

Als de vierpool zoals hier verondersteld zuiver reactief is, moet de waarde van W_a voor iedere vector $x = i + v$ en voor iedere reële frequentie ω gelijk zijn aan nul. Men kan bewijzen dat hiertoe vereist is, dat

$$S^{*}S = E_2 \tag{2.7}$$

voor alle reële frequenties. De verstrooiingsmatrix is dus voor reële frequenties orthogonaal. Stellen we verder

$$S_* = S(-p) \tag{2.8}$$

zo zien we gemakkelijk dat voor reële frequenties $S^* = S_*$. In plaats van (2.7) kunnen wij dus ook schrijven

$$S_* S = E_2 \tag{2.9}$$

Noteren we dat S_* in tegenstelling met S^* nog steeds een analytische functie is. Door analytische uitbreiding zien wij dan dat (2.9) niet alleen voor reële maar ook voor complexe frequenties geldt wat uiteraard voor (2.7) niet het geval is. Deze vaststelling is van groot belang omdat zij ons toelaat, resultaten zoals (2.9), die oorspronkelijk alleen voor reële frequenties bewezen zijn, tot het gehele complexe frequentievlak uit te breiden.

Men kan nu bewijzen dat (2.9) alleen mogelijk is indien S in de volgende vorm kan geschreven worden:

$$S = \frac{1}{g} \begin{Vmatrix} h & f \\ f & \mp h_* \end{Vmatrix} \tag{2.10}$$

waarbij f, g en h alle drie reële polynomen (d.w.z. polynomen met reële coëfficiënten) in p, de zogenoemde karakteristieke polynomen, zijn, waarbij in het bijzonder f een even of oneven en g een Hurwitzpolynoom moet zijn. Verder moeten f, g en h aan de betrekking

$$g g_* = h h_* \pm f^2 \tag{2.11}$$

voldoen. Hierbij geldt het bovenste teken in (2.10) en (2.11) voor f even, en het onderste teken voor f oneven. De notaties g_* en h_* zijn weer respectievelijk gelijk aan $g(-p)$ en $h(-p)$.

Met behulp van (2.6) kunnen we gemakkelijk de genormaliseerde impedantie- en admittantiematrices van de met de verstrooiingsmatrix (2.10) overeenkomende vierpool als functie van de karakteristieke polynomen f, g en h uitdrukken. Hiervoor is het nuttig, de polynomen g en h respectievelijk in hun even (g_e en h_e) en oneven (g_o en h_o) delen te splitsen. Deze even en oneven polynomen worden dus gedefinieerd door:

$$g = g_e + g_o$$

$$g_* = g_e - g_o$$

en

$$h = h_e + h_o$$

$$h_* = h_e - h_o$$

en wij hebben dus ook

$$g_e = (g + g_*)/2$$

$$g_o = (g - g_*)/2$$

$$h_e = (h + h_*)/2$$

$$h_o = (h - h_*)/2$$

Verder kunnen wij de coëfficiënten van de genormaliseerde kettingmatrix

$$K = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$$

m.b.v. bekende betrekkingen uitrekenen als impedantie- en admittantiematrix bekend zijn. Deze betrekkingen kunnen in genormaliseerde vorm als volgt geschreven worden:

$$a = \frac{z_{11}}{z_{12}} = -\frac{y_{22}}{y_{12}} \qquad b = \frac{|Z|}{z_{12}} = -\frac{1}{y_{12}}$$

$$c = \frac{1}{z_{12}} = -\frac{|Y|}{y_{12}} \qquad d = \frac{z_{22}}{z_{12}} = -\frac{y_{11}}{y_{12}}$$

waar $|Z|$ de determinant van de genormaliseerde impedantiematrix Z, en $|Y|$ deze van de genormaliseerde admittantiematrix Y betekent.

Op deze manier vinden wij uiteindelijk voor Z, Y en K,

voor f even:

$$\left.\begin{aligned} Z &= \frac{1}{g_o - h_o} \begin{Vmatrix} g_e + h_e & f \\ f & g_e - h_e \end{Vmatrix} && \text{(a)} \\ Y &= \frac{1}{g_o + h_o} \begin{Vmatrix} g_e - h_e & -f \\ -f & g_e + h_e \end{Vmatrix} && \text{(b)} \\ K &= \frac{1}{f} \begin{Vmatrix} g_e + h_e & g_o + h_o \\ g_o - h_o & g_e - h_e \end{Vmatrix} && \text{(c)} \end{aligned}\right\} \quad (2.12)$$

en voor f oneven:

$$\left.\begin{aligned} Z &= \frac{1}{g_e-h_e}\begin{Vmatrix} g_o+h_o & f \\ f & g_o-h_o \end{Vmatrix} \quad \text{(a)} \\ Y &= \frac{1}{g_e+h_e}\begin{Vmatrix} g_o-h_o & -f \\ -f & g_o+h_o \end{Vmatrix} \quad \text{(b)} \\ K &= \frac{1}{f}\begin{Vmatrix} g_o+h_o & g_e+h_e \\ g_e-h_e & g_o-h_o \end{Vmatrix} \quad \text{(c)} \end{aligned}\right\} \quad (2.13)$$

Komen wij nu op de vroeger vermelde voorwaarden terug waaraan de verstrooiingsmatrix van een zuiver reactieve vierpool moet voldoen. Belangrijk is hierbij dat deze voorwaarden niet alleen noodzakelijk maar ook voldoende zijn, zodat wij de volgende stelling kunnen uitspreken:

De noodzakelijke en voldoende voorwaarde opdat een gegeven matrix S de verstrooiingsmatrix van een fysisch te verwezenlijken zuiver reactieve vierpool zij, is, dat deze matrix in de vorm (2.10) kan geschreven worden, waarbij f, g en h reële polynomen in p zijn; waarbij verder f een even of oneven, en g een Hurwitz-polynoom is, en waarbij f, g en h bovendien aan de betrekking (2.11) voldoen. Hierbij geldt in (2.10) evenals in (2.11) het bovenste teken voor f even, en het onderste teken voor f oneven. Onder fysisch te verwezenlijken zuiver reactieve vierpool verstaan wij daarbij een vierpool die uitsluitend uit spoelen (positieve L), condensatoren (positieve C) en ideale transformatoren bestaat.

Om aan te tonen dat de in deze stelling vermelde voorwaarden werkelijk voldoende zijn gaat men uit van een der matrices Z, Y of K, die voor gegeven polynomen f, g en h gemakkelijk m.b.v. (2.12) of (2.13) kunnen worden bepaald. Men kan dan aantonen dat onder de gegeven voorwaarden de gekozen matrix altijd m.b.v. de zogenaamde kanonieke schakelingen voor zuiver reactieve vierpolen kan worden verwezenlijkt. *)

*) Een kanonieke schakeling voor zuiver reactieve vierpolen is hierdoor gekenmerkt dat iedere vierpool, die op gelijk welke manier uitsluitend uit spoelen, condensatoren en ideale transformatoren opgebouwd is, ook in equivalente vorm m.b.v. zulk een kanonieke schakeling kan worden verwezenlijkt.

Onder deze kanonieke schakelingen zijn die van Cauer [10, 19]), waarvan fig. 2.2 een van de twee mogelijke vormen geeft, theoretisch de meest eenvoudige, maar praktisch niet interessant omdat zij uiterst kritiek zijn. De kanonieke schakelingen van Darlington-Piloty [5, 20]) worden door kettingschakeling van een bepaald aantal van de in fig. 2.3 afgebeelde elementaire vierpolen (cellen), plus eventueel een ideale transformator, opgebouwd. Hierbij stemt elk van deze cellen overeen met een bepaald aantal dempingspolen (b.v. een pool bij $f = \infty$ voor de cellen *a* en *d*) van de vierpool.

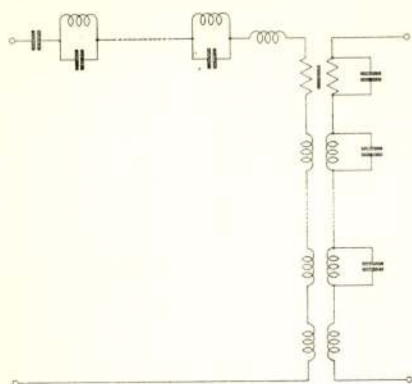


fig. 2.2
Voorbeeld van een kanonieke schakeling van Cauer.

Voor praktische toepassingen zijn zuivere ladderschakelingen de belangrijkste. Zoals wij uit de fig. 2.3 kunnen zien, onderscheiden zich de kanonieke schakelingen van Darlington-Piloty van de zuivere ladderschakelingen door het feit dat er eventueel van de cellen van het type *g* en *h* gebruik gemaakt moet worden. Men kan nu echter bewijzen, dat cellen van het type *h* nooit vereist zijn als alle dempingspolen bij reële frequenties liggen, wat voor filters met optimale dempingskarakteristiek altijd het geval is. Verder kan in dit geval het gebruik van cellen van het type *g* in de meeste praktische gevallen vermeden worden.

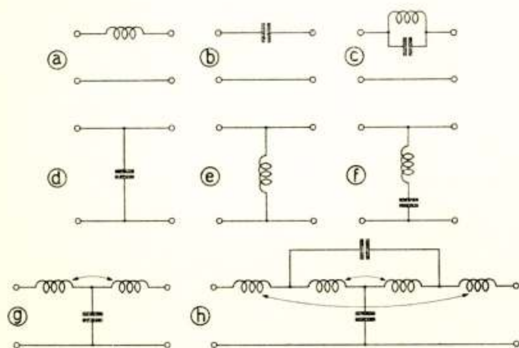


fig. 2.3
Elementaire vierpolen voor kanonieke kettingschakeling volgens Darlington-Piloty.

Dit kan men b.v. zien uit fig. 2.4 waar *a* identiek gelijk is aan de cel *g* van fig. 2.3 (*b* is dezelfde cel getekend in een meer conventionele vorm) en waar de cellen *c* tot *f* alle equivalente vierpolen van de cel *a* voorstellen. Hierbij is

de transformatieverhouding n noodzakelijk een positief getal omdat anders de resonantiefrequenties van de in deze cellen voorkomende resonantiekringen, en dus ook de hierdoor bepaalde dempingspolen, niet reëel kunnen zijn.

Zoals men gemakkelijk kan zien (een van de twee getallen $1 - n$ en $n - 1$ is, voor $n \neq 1$, onvermijdelijk een negatief getal) bevat elk van de vierpolen c tot f noodzakelijk een negatieve zelfinductie of een negatieve capaciteit in een der uiterste langs- of dwarstakken*). Beschouwen wij bijvoorbeeld de schakeling c, fig. 2.4; voor $n < 1$ is de rechtse langszelfinductie negatief. Wordt nu deze cel door een verdere cel van hetzelfde type met $n < 1$, of door een cel van het type a, fig. 2.4, gevolgd, zo is het mogelijk, dat de resulterende langszelfinductie positief uitvalt. Is dit niet het geval, dan kunnen toch nog dikwijls door toepassing van een zeker aantal Norton transformaties**) uitsluitend positieve elementen worden verkregen. Wordt dit doel echter ook hierdoor nog niet bereikt, dan kunnen wij nog de volgorde van de dempingspolen veranderen waardoor weer een hele reeks nieuwe mogelijkheden geboden wordt.

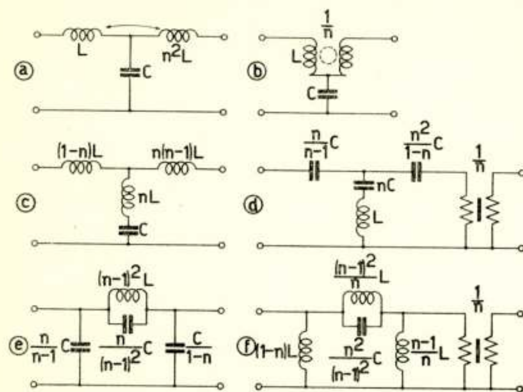


fig. 2.4
Verschillende equivalente vormen van de vierpool van fig. 2.3 g.

Natuurlijk is het niet altijd mogelijk een zuivere ladderschakeling met uitsluitend positieve elementen te verkrijgen; in dit geval moeten dus noodzakelijk cellen met gekoppelde spoelen van het type g, fig. 2.3, gebruikt worden.

*) Van de ideale transformatoren, die in de cellen d en f voorkomen, mogen wij hier afzien omdat deze altijd op eenvoudige manier naar een van de uiteinden van het filter kunnen verschoven worden.

**) De Norton transformatie, die ook bij de berekening van filters volgens de spiegelbeeldparametermetode dikwijls wordt toegepast, zal hier als bekend verondersteld worden. Zij is in de meeste tekstboeken over spiegelbeeldfilters evenals in een groot aantal andere publikaties beschreven. (zie b.v. [21–25]).

Zoals uit deze discussie blijkt, zou het uiterst nuttig zijn, bij het begin van de berekening van een filter onmiddellijk te kunnen bepalen of er van dit filter al dan niet een zuivere ladderschakeling met uitsluitend positieve elementen bestaat. De juiste voorwaarden waaronder dit mogelijk is, zijn echter tot nu toe alleen voor filters met Tchebycheff II karakteristiek zonder predistorsie bekend. (Filters met Tchebycheff I karakteristiek zonder predistorsie zijn altijd met positieve elementen te verwezenlijken) [26-29]).

3. **De karakteristieke functie**

Voor het verdere onderzoek van de hier te bespreken filters is het gewenst een nieuwe functie, de zogenaamde karakteristieke functie ψ, in te voeren. Deze wordt gedefiniëerd door

$$\psi = \frac{h}{f} \tag{3.1}$$

Het verband tussen ψ en de transmissiecoëfficiënt S_{12} wordt gegeven door de betrekking

$$\frac{1}{S_{12} S_{12*}} = 1 + \psi\psi_* \tag{3.2}$$

die gemakkelijk uit (2.4), (2.10) en (2.11) kan afgeleid worden. Zoals wij verder uit (2.3 c) en (3.2) kunnen zien, hebben wij voor reële frequenties

$$e^{2A} = \frac{1}{|S_{12}|^2} = 1 + \psi\psi_* = 1 + |\psi|^2 \tag{3.3}$$

Uit deze vergelijking onderkennen we gemakkelijk het grote voordeel van de functie ψ. Voor een passieve vierpool is de demping A inderdaad noodzakelijk positief zodat de functie S_{12} aan bepaalde beperkingen onderworpen is die voor ψ echter niet gelden. In meer preciese termen zullen wij het volgende theorema bewijzen:

Theorema: Iedere willekeurig gegeven reële rationale breuk in p is de karakteristieke functie van een fysisch te verwezenlijken reactieve vierpool.

Om dit te bewijzen is het voldoende aan te tonen, dat het

altijd mogelijk is, drie karakteristieke polynomen g, h en f te vormen, die aan alle in de vroeger vermelde stelling gegeven voorwaarden voldoen, en waarvoor h/f gelijk is aan de gegeven functie ψ. Dit kan op de volgende manier geschieden:

Iedere willekeurig gegeven reële rationale breuk kan als de verhouding van twee reële polynomen h_1 en f_1 geschreven worden, waarvan wij zonder enige beperking kunnen veronderstellen dat zij geen gemeenschappelijke factor bevatten. Wij hebben dus

$$\psi(p) = \frac{h_1}{f_1} \tag{3.4}$$

In het algemeen is f_1 geen even of oneven functie van p, maar wij kunnen de noemer van ψ in zulk een functie omvormen door h_1 en f_1 beide met een geschikt reëel polynoom $f_2(p)$ te vermenigvuldigen. In feite bestaan er een oneindig aantal polynomen waarvoor het produkt $f_1(p) \,.\, f_2(p)$ een even of oneven functie van p is. Wij zullen daarom eisen dat $f_2(p)$ het kleinste hiervoor geschikte polynoom is. Hierdoor is $f_2(p)$ op een willekeurige constante factor na volledig bepaald.

Om het zo gedefiniëerde polynoom $f_2(p)$ te vinden zullen wij eerst $f_1(p)$ ontbinden in factoren. Ieder van deze factoren is noodzakelijk van een der volgende types

$$p,\ (p - j\omega_i),\quad (p - \alpha_i),\quad (p - \beta_i - j\gamma_i) \tag{3.5}$$

waarbij wij veronderstellen dat alle coëfficiënten ω_i, α_i, β_i en γ_i reële, van nul verschillende getallen zijn.

Bevat nu het polynoom $f_1(p)$ een complexe factor, dan bevat het ook de toegevoegd complexe factor, zodat wij $f_1(p)$ ook in factoren van de typen

$$p,\ (p^2 + \omega_i^2),\quad (p - \alpha_i) \text{ en } (p^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 - 2\beta_i p) \tag{3.6}$$

kunnen ontbinden. De eerste van deze factoren is klaarblijkelijk oneven en de tweede even. Verder is het mogelijk dat het oorspronkelijke polynoom $f_1(p)$ ook even factoren van de vormen

$$(p^2 - \alpha_i^2) \text{ of } (p^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2)^2 - 4\beta_i^2 p^2 \tag{3.7}$$

bevat.

In ieder geval kunnen wij alle even en oneven factoren die

op onverschillig welke manier door hergroepering uit de oorspronkelijke factoren kunnen worden verkregen, in een polynoom $f_1' = f_1'(p)$ samenbrengen dat dus noodzakelijk een reëel even of oneven polynoom in p is. Alle andere factoren brengen we onder in een tweede reëel polynoom $f_1'' = f_1''(p)$, dat dus blijkbaar geen wortels op de reële frequentieas heeft. Bij de factoren (3.6) komt eventueel nog een constante factor, die wij op willekeurige wijze tussen f_1' en f_2' mogen verdelen. Kiezen wij nu voor f_2 de functie $f_{1*}'' = f_1''(-p)$ dan krijgen wij uiteindelijk

$$\psi = \frac{h_1}{f_1} = \frac{h_1}{f_1' f_1''} = \frac{h_1 f_{1*}''}{f_1' f_1'' f_{1*}''} = \frac{h}{f} \tag{3.8}$$

waarbij

en

$$\left.\begin{aligned} h &= h_1 f_{1*}'' \\ f &= f_1' f_1'' f_{1*}'' \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

Blijkbaar is f een reëel even of oneven polynoom in p want f_1' is even of oneven terwijl $f_1'' f_{1*}''$ noodzakelijk even is, en verder zijn alle drie de polynomen f_1', f_1'' en f_{1*}'' reëel.

Dat f het kleinst mogelijke reële even of oneven polynoom is waarvoor $\psi = h/f$, kan ook zonder grote moeilijkheden bewezen worden; wij zullen hier echter van dit bewijs afzien.

Er blijft dus alleen aan te tonen hoe het Hurwitz-polynoom $g(p)$, dat aan (2.11) moet voldoen, kan bepaald worden. Beschouwen wij hiertoe de vergelijking:

$$hh_* \pm f^2 = 0 \tag{3.10}$$

waar het plus-teken voor f even, en het minus-teken voor f oneven geldt. Deze vergelijking heeft geen wortels op de imaginaire p-as want wij hebben voor p zuiver imaginair

$$hh_* \pm f^2 = |h|^2 + |f|^2 \geqslant 0$$

zodat een zuiver imaginaire wortel van (3.10) ook een wortel van $h = 0$ en $f = 0$ zou moeten zijn. Dit is echter onmogelijk omdat iedere gemeenschappelijke wortel van $h = 0$ en $f = 0$ ook een wortel van $f_{1*}'' = 0$ is, en omdat deze laatste vergelijking wegens de definitie van het polynoom f_1'' geen wortels op de imaginaire p-as kan hebben.

Hieruit volgt dat alle factoren van de uitdrukking

$$hh_* \pm f^2 \tag{3.11}$$

van een der vormen $p \pm \alpha_i$ of $p \pm \beta_i \pm j\gamma_i$ zijn waarbij α_i, β_i en γ_i positieve reële constanten zijn. Maar daar (3.11) even is in p, stemt met iedere eventuele factor $(p - \alpha_i)$ ook noodzakelijk een factor $(p + \alpha_i)$ overeen, en daar de coëfficiënten van (3.11) bovendien reëel zijn, stemmen met iedere eventuele factor $(p - \beta_i - j\gamma_i)$ ook de drie factoren $(p - \beta_i + j\gamma_i)$, $(p + \beta_i - j\gamma_i)$ en $(p + \beta_i + j\gamma_i)$ overeen. De wortels van (3.10) liggen dus noodzakelijk zoals in fig. 3.1 schematisch is aangeduid.

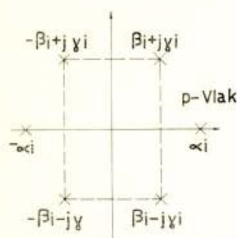


fig. 3.1
Typische ligging van wortels van de vergelijking $hh_* \pm f^2 = 0$.

Wij kunnen nu alle factoren van (3.11) van de typen $(p + \alpha_i)$, $(p + \beta_i + j\gamma_i)$ en $(p + \beta_i - j\gamma_i)$ in een enkel polynoom samenvatten dat wij verder met de vierkantswortel van de constante factor, die in (3.11) begrepen is, zullen vermenigvuldigen. Het zo gevormde polynoom is dus een reëel Hurwitz-polynoom, dat wij $g = g(p)$ zullen noemen. Het produkt van alle andere factoren van (3.11), vermenigvuldigd met dezelfde vierkantswortel van de zojuist genoemde constante factor, vormt een anti-Hurwitz polynoom dat blijkbaar gelijk is aan $g_* = g(-p)$. Het zoëven gedefinieerde Hurwitz-polynoom g voldoet dus aan de vergelijking (2.11) zodat de zo verkregen polynomen f, g en h werkelijk de karakteristieke polynomen van een zuiver reactieve vierpool zijn.

De zo verkregen oplossing van het gestelde probleem is echter niet de enig mogelijke. Verdere oplossingen kunnen blijkbaar verkregen worden als wij de teller en noemer van de gegeven functie niet alleen met f''_{1*} maar ook met een ander polynoom vermenigvuldigen, dat echter een reëel even polynoom in p zonder wortels op de imaginaire p-as moet zijn. Zulk een polynoom heeft de helft van zijn wortels in het linker halfvlak, en deze wortels zullen dan ook wortels zijn van het nieuwe polynoom g.

De zojuist beschreven meer algemene oplossingen, die niet met het kleinst mogelijke even of oneven polynoom f overeenstemmen, zijn voor ons echter zonder belang omdat zij aanleiding geven tot een impedantiematrix van hogere graad, en dus een groter aantal elementen voor de uiteindelijke schakelingen eisen zonder dat hierdoor een betere dempingskromme kan verkregen worden. Natuurlijk is hierdoor wel de mogelijkheid gegeven, de fasekarakteristiek te beïnvloeden, maar hierop zullen

wij niet verder ingaan omdat wij ons tot filters hebben willen beperken waarvan alleen het dempingsverloop voorgeschreven is.

Een andere bijkomende oplossing van ons probleem is echter van groot belang. Deze wordt verkregen door h en f respectievelijk door $-h$ en $-f$, of, wat op hetzelfde neerkomt, g door $-g$ te vervangen (vergl. 2.10). Dit komt hierop neer, de verstrooiingsmatrix S door de verstrooiingsmatrix $-S$, en daarmee de oorspronkelijke vierpool door zijn duale vierpool te vervangen. Zoals wij inderdaad gemakkelijk uit (2.6) kunnen zien, betekent de vervanging van S door $-S$, dat de genormaliseerde impedantiematrix van de ene vierpool gelijk is aan de genormaliseerde admittantiematrix van de andere en omgekeerd. Twee vierpolen die deze eigenschappen bezitten worden nu juist 'duale vierpolen' genoemd,

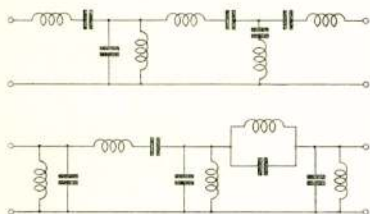


fig. 3.2
Voorbeeld van twee met elkaar duale banddoorlatendefilters.

Wij kunnen op het onderwerp van duale vierpolen hier niet verder ingaan, maar er zij toch aan herinnerd dat de dualiteitseigenschappen overal in de netwerktheorie een zeer belangrijke rol spelen. In het bijzonder is het begrip 'duale vierpool' niet alleen voor de filtertheorie volgens de bedrijfsparametermetode maar ook voor die volgens de spiegelbeeldparametermetode van zeer groot belang.

Als voorbeeld van twee duale vierpolen geven wij in fig. 3.2 twee met elkaar duale banddoorlatendefilters.

4. Het opstellen van de karakteristieke functie *)

4.1 *Algemene beschouwingen over de ligging van de polen en de nulpunten van de karakteristieke functie*

Uit (3.3) kunnen wij zien dat voor reële frequenties de nulpunten van de demping A samenvallen met de nulpunten van de karakteristieke functie ψ, en de polen van A samenvallen met de polen van ψ. Hieruit volgt onmiddellijk dat wij de nulpunten van de karakteristieke functie in het doorlaatgebied van het te berekenen filter moeten leggen als wij de demping

*) Zie in verband hiermee de hierboven vermelde referenties [5-14]) evenals [30-39]

daar zo klein mogelijk willen maken, en verder dat de polen ervan in het spergebied moeten liggen als wij daar een zo groot mogelijke demping wensen te verkrijgen. Op zijn beurt vereist dit onder meer dat alle nulpunten en alle polen van ψ op reële frequenties, d.w.z. op de imaginaire p-as gelegen zijn, of, wat op hetzelfde neerkomt, dat de polynomen h en f alleen factoren van de vorm p en $(p^2 + \omega_i^2)$ bevatten. Onder deze omstandigheden heeft de karakteristieke functie dus noodzakelijk een der volgende twee vormen:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= K \frac{\prod_i (p^2 + \omega_i^2)}{\prod_k (p^2 + \omega_k^2)} \\ \psi &= Kp \frac{\prod_i (p^2 + \omega_i^2)}{\prod_k (p^2 + \omega_k^2)} \end{aligned}\right\} \tag{14.2}$$

waarbij K een constante factor is en waar natuurlijk een willekeurig aantal van de parameters ω_i of ω_k nul mogen zijn. Hieruit volgt het zeer belangrijke feit dat de karakteristieke functie een even of oneven functie van p moet zijn als wij een optimaal dempingsverloop willen verkrijgen.

Dat aan deze eis voor al de door Prof. Bähler en Ir. Milort besproken filters voldaan is, kunnen we gemakkelijk aantonen. Inderdaad vindt men b.v. dat voor Butterworth-filters de karakteristieke functie op een constante factor na gelijk is aan p^n. Voor filters met Tschebyschew I karakteristiek is ψ, weer op een constante factor na gelijk aan het Tschebyschew polynoom van de n^{de} graad, en deze is altijd even voor n even, en oneven voor n oneven. Tenslotte is de karakteristieke functie van filters met Tschebyschew II karakteristiek een even of oneven rationale breuk in p al naargelang de graad van deze rationale breuk even of oneven is*).

4.2 *Fysische betekenis van 'ψ even of oneven'*

Een even of oneven karakteristieke functie is niet alleen van wiskundig standpunt uit gezien zeer voordelig maar geeft ook

*) De graad van een rationale breuk in p is deze van de term p^n van de hoogste macht die in deze rationale breuk voorkomt.

aanleiding tot bijzonder interessante klassen van filters. Beschouwen wij eerst een oneven karakteristieke functie waarvoor dus hetzij h even en f oneven, hetzij h oneven en f even zijn. In beide gevallen volgt uit (2.3a), (2.3b), (2.4) en (2.10):

$$S_{11} = S_{22}$$

en dus (4.3)

$$z_1 = z_2$$

wat betekent dat het te berekenen filter symmetrisch is. Hetzelfde resultaat kan ook voor f even uit (2.12a) en voor f oneven uit (2.13a) afgeleid worden. Wij vinden dan inderdaad onder de hierboven vermelde voorwaarden:

$$z_{11} = z_{22}$$

Beschouwen wij nu het geval ψ even. Beide polynomen h en f moeten dan even zijn zodat wij m.b.v. (2.3a), (2.3b), (2.4) en (2.10) vinden

$$S_{11} = -S_{22}$$

en dus ook

$$z_1 = 1/z_2 \tag{4.4}$$

wat met de definitie van een antimetrisch filter overeenstemt *). Zoals bekend is (4.4) equivalent met de betrekking

$$|Z| = z_{11}\, z_{22} - z_{12}^2 = 1$$

die ook gemakkelijk rechtstreeks m.b.v. (2.12) kan afgeleid worden.

In het voorbijgaan zij vermeld dat de zoëven afgeleide eigeng schappen, zoals men gemakkelijk kan zien, ook omgekeerd geldizijn, d.w.z. een symmetrisch filter heeft altijd een oneven, en een antimetrisch filter een even karakteristieke functie.

Ook voor het feit dat de polen van ψ op de imaginaire p-as

*) Op het begrip 'antimetrische filters' zelf zullen wij hier niet nader ingaan aangezien dit begrip ook in de spiegelbeeldtheorie een belangrijke rol speelt en dus als bekend kan verondersteld worden. Als voorbeeld zij alleen eraan herinnerd, dat o.a. filters, die aan de ene kant een zogenaamde Z_T spiegelbeeldimpedantie, en langs de andere kant de hiermee overeenkomende Z_π spiegelbeeldimpedantie hebben, antimetrisch zijn.

zijn gelegen, kan een eenvoudige fysische interpretatie gegeven worden. Zoals wij inderdaad in paragraaf 2 hebben gezien, wordt hierdoor eventueel de mogelijkheid geboden, het filter door een zuivere ladderschakeling te verwezenlijken.

Tenslotte willen wij er nog op wijzen dat de uitdrukking (3.3) voor symmetrische filters in de vorm

$$e^{2A} = 1 - \psi^2 \tag{4.5}$$

en voor antimetrische filters in de vorm

$$e^{2A} = 1 + \psi^2 \tag{4.6}$$

kan geschreven worden.

Voeren wij nu nog een nieuwe functie $\varphi = \varphi(\omega)$ in, die wij voor ψ oneven door

$$\psi(p) = j\varphi(\omega)$$

en voor ψ even door

$$\psi(p) = \varphi(\omega)$$

definiëren, dan krijgen wij in beide gevallen

$$e^{2A} = 1 + \varphi^2 \tag{4.7}$$

Hierbij is de functie φ een even (voor antimetrische filters) of oneven (voor symmetrische filters) reële rationele functie van ω.

4.3 *Algemene beschouwingen over Tschebyschew benadering*

Op de Tschebyschew benadering in het algemeen, die feitelijk een zuiver wiskundig begrip is, zullen wij hier niet nader ingaan maar ons in plaats daarvan onmiddellijk met de hier beoogde toepassing voor filters met willekeurig gekozen dempingspolen bezighouden. Het is dan het eenvoudigst, en voor onze fysische toepassingen ook het doelmatigst, deze benadering op de volgende manier te definiëren:

1ste definitie:

Gezocht wordt de karakteristieke functie die bij gegeven ligging van de dempingspolen en gegeven maximale demping A_m in het doorlaatgebied de grootst mogelijke demping in het sper-

gebied *) geeft. Wat wij hierbij precies onder 'grootst mogelijke demping in het spergebied' verstaan zal in de loop van de verdere discussie duidelijker te voorschijn treden.

Zoals wij hierna zullen zien is de zojuist gegeven definitie identiek met de volgende:

2de definitie:

Gezocht wordt de karakteristieke functie die bij gegeven ligging van de dempingspolen en bij gegeven demping in het spergebied de kleinst mogelijke maximale demping in het doorlaatgebied geeft.

Ook hier zal de juiste betekenis van het begrip 'gegeven demping in het spergebied' later duidelijk worden.

Alvorens de door deze definities bepaalde karakteristieke functie ψ nader toe te lichten willen wij er eerst nog op wijzen dat door het feit dat de dempingspolen bepaald zijn, niet alleen de noemer f van deze karakteristieke functie volledig bepaald is maar dat hierdoor ook de graad van ψ bekend is **). Ligt inderdaad een dempingspool bij $p = \infty$ dan is de graad van ψ gelijk aan die van h en de orde van deze pool bepaalt het verschil tussen de graad van h en die van f; ligt echter bij $p = \infty$ geen dempingspool, dan is de graad van ψ gelijk aan die van f.

Men kan nu het volgende belangrijke theorema bewijzen:

Theorema:

Onder alle even (oneven) karakteristieke functies waarvan alle polen voorgeschreven zijn en waarvoor de dempingskromme in het doorlaatgebied nergens een maximaal toegelaten demping A_m overschrijdt, bestaat er één, maar ook niet meer dan één, waarvoor het aantal van elkaar verschillende frequenties, waarbij $A = 0$ wordt, maximaal is, en waarvoor verder de dempingskromme de waarde $A = A_m$ bij de grensfrequentie en bij alle tussen twee opeenvolgende nulwaarden gelegen maxima bereikt.

---

*) Wij zullen ons in deze paragraaf overal op het standpunt van een laagdoorlatendfilter plaatsen. Alle resultaten blijven echter ook voor banddoorlatendefilters geldig; alleen moeten wij in dit geval de uitdrukkingen 'het spergebied' en 'grensfrequentie' door de uitdrukkingen 'de spergebieden' en 'grensfrequenties' vervangen.

**) De functies ψ en $-\psi$ worden in dit opzicht natuurlijk niet als twee verschillende functies beschouwd.

De zo verkregen even (oneven) karakteristieke functie heeft de belangrijke eigenschap, dat zij bij een willekeurige frequentie in het spergebied een hogere demping levert dan ieder andere even (oneven) karakteristieke functie met dezelfde polen, die in het doorlaatgebied aan dezelfde eis $A \leqq A_m$ voldoet. Zij heeft verder de eigenschap dat zij onder alle even (oneven) karakteristieke functies met dezelfde polen, die in het spergebied aan willekeurig voorgeschreven dempingseisen voldoen, de kleinst mogelijke maximale demping in het doorlaatgebied geeft.

Deze karakteristieke functie, die, zoals wij juist gezien hebben, in het doorlaatgebied een dempingsverloop met gelijke rimpels geeft *), is bijgevolg werkelijk de optimale karakteristieke functie volgens een der twee hierboven gegeven definities.

Het bovenstaande theorema kan ook bewezen worden als wij in het begin in plaats van ψ even of oneven een willekeurige reële rationale functie in p met gegeven polen toelaten. Zoeken wij dan de hiermee overeenkomende optimale functie in de zin van een van de twee vorige definities, dan vinden wij vooreerst dat de optimale functie ψ even of oneven moet zijn; zij moet dus verder ook aan alle andere in het bovenstaande theorema vermelde eigenschappen voldoen. Hierdoor wordt dus een werkelijk streng bewijs verkregen voor het feit dat ieder optimale karakteristieke functie even of oneven moet zijn. Het hiervoor in paragraaf 4.1 gegeven bewijs was inderdaad meer van intuïtieve dan van streng wiskundige aard.

4.4 *Het referentiefilter*

Wij kunnen ons nu afvragen, hoe wij in de praktijk een karakteristieke functie met de in par. 4.3 vermelde eigenschappen kunnen vinden. Zoals wij weten bestaat er bij gegeven ligging van de dempingspolen en bij gegeven waarde van A_m slechts één oplossing zodat we elke willekeurige methode mogen gebruiken, die ons toelaat, een functie met de gezochte eigenschappen te construeren. Een mogelijkheid is b.v. het probleem op abstrakt wiskundige manier op te lossen zoals dit voor de

---

*) Laten wij er op wijzen dat in de wiskunde de begrippen 'benadering in de zin van Tschebyschew' en 'benadering met gelijke rimpels' niet altijd zoals hier met elkaar identiek zijn. Relatief eenvoudige voorbeelden kunnen gegeven worden waarbij de Tschebyschew benadering geen verloop met gelijke rimpels vertoont.

Tschebyschew II benadering door Nijenhuis werd gedaan[33-37]. Het blijkt echter dat de gezochte functie het eenvoudigst m.b.v. het door Darlington[5]) ingevoerde referentiefilter kan gevonden worden.

Beschouwen wij de voor reële frequenties geldige uitdrukking (4.7) en vergelijken wij deze met de volgende, voor filters met Tschebyschew I karakteristiek geldende uitdrukking, die wij reeds door de lezing van Prof. Bähler hebben leren kennen

$$e^{2A} = 1 + H^2 \; T_n^2 \, (\Omega) \tag{4.8}$$

en waar

$$H = \sqrt{e^{2A_m} - 1} \tag{4.9}$$

$T_n \, (\Omega)$ = Tschebyschew polynoom van n-de graad in $\Omega = \omega/\omega_c$ (ω_c = grensfrequentie).

Hierbij kan het Tschebyschew polynoom $T_n \, (\Omega)$ in de volgende parametrische vorm geschreven worden.

$$\left.\begin{aligned} T_n\,(\Omega) &= \cos n\,\alpha \qquad &\text{(a)} \\ \Omega &= \cos \;\; \alpha \qquad &\text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

zodat wij in plaats van (4.8) ook kunnen schrijven:

$$e^{2A} = 1 + (e^{2A_m} - 1) \cos^2 n\,\alpha \tag{4.11}$$

Filters met Tschebyschew I karakteristiek zijn uiteraard slechts een speciaal geval van de algemene, hier te behandelen filters, en in dit speciale geval wordt de in (4.7) voorkomende functie φ dus eenvoudig door

$$\varphi = H \cos n\,\alpha \tag{4.12}$$

samen met (4.9) en (4.10 b) gedefiniëerd.

Het is nu juist de in (4.11) en (4.12) voorkomende cosinusfunctie die ons het gewenste dempingsverloop met gelijke rimpels geeft, en wij kunnen ons dus afvragen of het niet mogelijk is, ook voor het algemene geval op een analoge manier de gewenste karakteristieke functie te vinden. Hiervoor zullen wij een hulpparameter Θ invoeren die een met de hierboven gebruikte hulpparameter $n\,\alpha$ volledig analoge rol zal spelen. Om

echter een eenvoudige fysische interpretatie van Θ te kunnen vinden, zullen wij niet van de functie φ maar wel van de karakteristieke functie ψ zelf uitgaan, en verder zullen wij om dezelfde reden geen cirkelfuncties maar hyperbolische functies gebruiken. Nauwkeuriger uitgedrukt zullen wij Θ voor symmetrische filters door

$$\psi = H \sinh \Theta \tag{4.13}$$

en voor antimetrische filters door

$$\psi = H \cosh \Theta \tag{4.14}$$

definiëren. Verder zullen wij het reëel en imaginair gedeelte van Θ respectievelijk door a en b aanduiden, d.w.z.

$$\Theta = a + jb \tag{4.15}$$

Beschouwen wij nu eerst het antimetrische geval (ψ even) en onderzoeken wij het verloop van Θ voor reële frequenties (imaginaire p). De betrekking $\dfrac{\psi}{H} = \cosh a \cos b + j \sinh a$ $\sin b$ toont onmiddellijk aan dat wij noodzakelijk of $a = 0$ of $b = k\pi$ (k een geheel getal) hebben daar een even functie voor reële frequenties reëel is. In het eerste geval krijgen wij dan m.b.v. (4.6)

$$e^{2A} = 1 + (e^{2A_m} - 1) \cos^2 b \tag{4.16}$$

en in het tweede geval

$$e^{2A} = 1 + (e^{2A_m} - 1) \cosh^2 a \tag{4.17}$$

zodat wij gemakkelijk kunnen zien dat wij in het eerste geval $A \leqq A_m$ en in het tweede geval $A \geqq A_m$ hebben. Hieruit volgt dat de coëfficiënt Θ aan de volgende eisen moet voldoen:

a. In een doorlaatgebied:

$$a = 0$$

De demping A is dan door (4.16) gegeven en wij hebben

$$b = (2\,k + 1)\,\pi/2 \text{ voor } A = 0$$

en

$$b = k\pi \quad \text{voor} \quad A = A_m$$

Verder moet b tussen twee op elkaar volgende waarden $A = 0$ en $A = A_m$ een monotoon stijgende of monotoon dalende functie van de frequentie ω zijn omdat anders bijkomende maxima met amplitude kleiner dan A_m kunnen optreden.

b. In een spergebied:

$$b = k\pi$$

De demping A is dan door (4.17) gegeven waaruit verder volgt dat voor $A = \infty$ ook $a = \infty$ moet zijn.

c. Op een grensfrequentie:

$$a = 0 \quad \text{en} \quad b = k\pi$$

Vergelijken wij nu deze eisen met zekere uit de spiegelbeeldparametertheorie bekende resultaten dan zien wij gemakkelijk dat wij aan al deze eisen kunnen voldoen als wij Θ gelijk kiezen aan de spiegelbeeldoverdrachtsexponent van een symmetrisch spiegelbeeldparameterfilter, het zogenoemd referentiefilter, waarvan de grensfrequenties en dempingspolen met die van het te berekenen bedrijfsparameterfilter overeenstemmen (ook aan de bijzondere eis voor b in het doorlaatgebied is hierdoor voldaan omdat de spiegelbeeldfaze van een zuiver reactief netwerk in een doorlaatgebied altijd een monotoon stijgende functie van ω is).

Dit bewijst natuurlijk nog niet dat de zo bepaalde coëfficiënt Θ werkelijk de gezochte functie van ω is; wij moeten namelijk nog aantonen dat cosh Θ werkelijk een reële even rationale functie van p is, en dat het aantal rimpels, of, wat op hetzelfde neerkomt, het aantal van elkaar verschillende reële nulpunten, werkelijk het hoogst mogelijke is.

Beschouwen wij daarom de impedantiematrix van een vierpool met de spiegelbeeldimpedanties W_1 en W_2 en met de spiegelbeeldoverdrachtsexponent Θ.

Wij hebben *)

$$\begin{Vmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{12} & Z'_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} W_1 \coth \Theta & \sqrt{W_1 W_2}/\sinh \Theta \\ \sqrt{W_1 W_2}/\sinh \Theta & W_2 \coth \Theta \end{Vmatrix} \tag{4.18}$$

*) Wij hebben de notaties Z'_{11}, Z'_{22} en Z'_{12} met een accent gekenmerkt om duidelijk te tonen dat zij *niet* op het te berekenen filter betrekking hebben en dus niet met de in paragraaf 2 gebruikte notaties Z_{11}, Z_{22} en Z_{12} mogen verward worden.

Voor een symmetrisch filter ($W_1 = W_2$) volgt hieruit

$$\cosh \Theta = \frac{Z'_{11}}{Z'_{12}} \tag{4.19}$$

wat aantoont dat cosh Θ in dit geval werkelijk een reële even rationale functie van p is omdat voor een zuiver reactief netwerk, en dus ook voor het referentiefilter, Z'_{11} en Z'_{12} beide oneven reële rationale functies van p zijn. Dat cosh Θ werkelijk bij gegeven aantal dempingspolen het grootst mogelijk van elkaar verschillende aantal reële nulpunten heeft kan m.b.v. (4.19) aangetoond worden. Dit zou echter een diepergaand onderzoek van de eigenschappen van de impedanties Z'_{11} en Z'_{12} van een zuiver reactieve vierpool vergen en wij zullen daarom hierop niet verder ingaan.

Beschouwen wij nu nog kort het geval van een symmetrisch filter (ψ oneven). Wij vinden dan dat de door (4.13) gedefiniëerde coëfficiënt aan de volgende eisen moet voldoen:

a. In een doorlaatgebied:

$$a = 0$$

De demping A is dan door

$$e^{2A} = 1 + (e^{2A_m} - 1)\sin^2 b \tag{4.20}$$

gegeven en wij hebben

$$b = k\pi \text{ voor } A = 0$$

en

$$b = (2k+1)\pi/2 \text{ voor } A = A_m.$$

Verder moet b weer tussen twee opeenvolgende waarden $A = 0$ en $A = A_m$ een monotoon stijgende of monotoon dalende functie van ω zijn.

b. In een spergebied:

$$b = (2k+1)\pi/2$$

De demping is dan weer door (4.17) gegeven en voor $A = \infty$ moet weer $a = \infty$ zijn.

c. Bij een grensfrequentie:

$$a = 0,\ b = (2k+1)\pi/2$$

Aan die eisen kunnen wij nu voldoen door Θ gelijk te kiezen aan de spiegelbeeldoverdrachtsexponent van een antimetrisch referentiefilter waarvan de grensfrequenties en dempingspolen weer met die van het te berekenen bedrijfsparameterfilter overeenkomen. Aangezien voor een antimetrisch filter het produkt $W_1 W_2$ gelijk is aan een constante factor R_0^2 vinden wij ook verder m.b.v. (4.18) dat nu

$$\sinh \Theta = \frac{R_0}{Z'_{12}}$$

zodat dus in dit geval $\sinh \Theta$ werkelijk zoals vereist een oneven reële rationale functie van p is. Ook hier kan aangetoond worden dat $\sinh \Theta$ bij gegeven aantal dempingspolen werkelijk het hoogst mogelijke aantal van elkaar verschillende reële nulpunten heeft.

Samenvattend kunnen wij dus zeggen dat de gewenste optimale dempingskarakteristiek in het geval van een symmetrisch filter door middel van een antimetrisch referentiefilter, en in geval van een antimetrisch filter door middel van een symmetrisch referentiefilter kan verkregen worden. Dit referentiefilter is in beide gevallen een volgens de klassieke spiegelbeeldparametermethode te berekenen filter waarvan echter uitsluitend de spiegelbeeldoverdrachtsexponent en geenszins de spiegelbeeldimpedanties of de elementwaarden bekend moeten zijn.

4.5 *Keuze van het referentiefilter*

4.5.1 Keuze van A_m

Is de maximale dempingsrimpel in het doorlaatgebied voorgeschreven, dan is de keuze van A_m natuurlijk evident. Het kan echter ook gebeuren dat geëist wordt dat de modulus van de reflectiecoëfficiënt ϱ in het doorlaatgebied een bepaalde waarde $|\varrho| = \varrho_m$ niet mag overschrijden. In dit geval volgt A_m uit de betrekking van Feldtkeller

$$e^{-2A_m} + \varrho_m^2 = 1$$

die voor de in de praktijk voorkomende kleine waarden van A_m ook in de vorm

$$A_m = \frac{\varrho_m^2}{2} \quad \text{(in Nepers)}$$

kan geschreven worden. De waarde van H volgt dan uit (4.9), en voor kleine waarden van A_m eenvoudiger uit

$$H = \sqrt{2 A_m} = \varrho_m$$

4.5.2 Bepaling van de dempingseisen waaraan het referentiefilter moet voldoen

Uit de discussie in par. 4.4 volgt dat de demping A in het spergebied voor symmetrische evenals voor antimetrische filters door

$$e^{2A} = 1 + H^2 \cosh^2 a \qquad (4.21)$$

gegeven wordt, waarbij a de spiegelbeelddemping is van het referentiefilter. Is dan de dempingseis b.v. in grafische vorm gegeven zoals in fig. 4.1 a dan kunnen wij deze op zeer eenvoudige manier m.b.v. (4.21) punt voor punt in een nieuwe dempingseis voor de spiegelbeelddemping a van het referentiefilter omrekenen (fig. 4.1 b). In de praktijk is het gewoonlijk zelfs niet nodig, deze omrekening werkelijk punt voor punt uit te voeren. Voor grote waarden van a hebben wij inderdaad

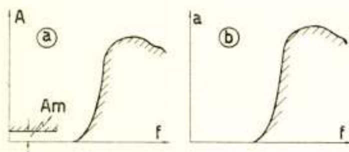


fig. 4.1
Voorbeeld van bedrijfsdempingseis (a) en hiermee overeenkomende spiegelbeelddempingseis van het referentiefilter (b).

$$\cosh a \simeq \frac{e^a}{2}$$

zodat (4.21) voor grote waarden van a en A ook in de vorm

$$A = a - \ln \frac{2}{H} \text{ Neper} \qquad (4.22)$$

of, als A en a in db uitgedrukt zijn, in de vorm

$$A = a - 20 \log \frac{2}{H} \text{ db.}$$

kan geschreven worden. De dempingseisen voor de spiegelbeelddemping a van het referentiefilter kunnen dus gewoonlijk daardoor gevonden worden dat wij eenvoudig bij de dempingseisen voor de bedrijfsdemping A de constante waarde $\ln(2/H) \simeq (1/2) \ln(2/A_m)$, die in de praktijk altijd positief is, bijtellen. Belangrijk is nu, dat wij aan de dempingseisen voor A voldoen als aan de zo gevonden eisen voor a voldaan is. Een correctiefaktor zoals voor spiegelbeeldfilters is daarbij niet nodig. Verder komen de praktische grensfrequenties van het te berekenen

filter precies met de theoretische grensfrequenties van het referentiefilter overeen zodat dus ook de onzekerheid over de optimale ligging van de grensfrequenties hier niet meer bestaat.

4.5.3 Bepaling van de dempingspolen van het referentiefilter

Hiervoor kan een willekeurige methode gebruikt worden die uit de gewone spiegelbeeldtheorie bekend is. De veruit eenvoudigste van deze methodes is ongetwijfeld de gabarietmethode van Laurent-Rumpelt. Deze methode wordt in de literatuur uitvoerig behandeld en wij zullen niet verder hierop ingaan (zie b.v. [23, 25, 40, 41])

4.5.4 Speciale beschouwingen bij de keuze van de dempingspolen

We zullen deze paragraaf beginnen met enkele definities betreffende het begrip 'orde van een dempingspool'. Om verwarring te vermijden zullen wij hiervoor dezelfde terminologie gebruiken als voor spiegelbeeldparameterfilters. Voor deze laatste wordt gewoonlijk de spiegelbeelddempingspool, die door een eenvoudige symmetrische Zobel-cel wordt geleverd, een enkelvoudige of gehele dempingspool genoemd; overeenkomend hiermee is dan een halve spiegelbeelddempingspool die welke door een halve Zobel-cel wordt verwezenlijkt. Het lijkt logisch deze definitie niet alleen op het referentiefilter toe te passen maar ook tot het hierdoor gedefinieerde bedrijfsparameterfilter uit te breiden zoals door vergelijking (4.22) gesuggereerd wordt.

Men kan dan tonen dat de volgende regels geldig zijn:

a. Betekent Θ zoals hierboven de spiegelbeeldoverdrachtsexponent van het referentiefilter en heeft dit laatste een spiegelbeelddempingspool van de k^{de} orde bij een bepaalde eindige, van nul verschillende frequentie ω_n, dan bevat de noemer van e^{Θ}, en derhalve ook de noemer van de karakteristieke functie ψ, de factor $(p^2 + \omega_n^2)^k$.
b. Heeft het referentiefilter een spiegelbeelddempingspool van de k^{de} orde bij $\omega = 0$, dan bevat de noemer van e^{Θ} evenals deze van ψ de factor p^{2k}. Een enkelvoudige pool bij nul komt dus met een factor p^2, en een halve pool bij nul met een factor p overeen.
c. Heeft het referentiefilter een spiegelbeelddempingspool van

de k^{de} orde bij $\omega = \infty$ dan is de graad van de teller van e^{Θ} met $2k$ hoger dan die van de noemer, en dezelfde betrekking is dan ook geldig tussen de graden van teller en noemer van ψ. Een enkelvoudige pool bij $\omega = \infty$ komt dus met een graadverschil van 2, en een halve pool bij $\omega = \infty$ met een graadverschil van 1 overeen.

Het is ons nu mogelijk de volgende regels te geven waarop bij de keuze van de dempingspolen dient gelet te worden.

1. **Laagdoorlatendefilters**

Is het te berekenen filter symmetrisch (antimetrisch referentiefilter), dan moet er bij $\omega = \infty$ noodzakelijk een dempingspool van de orde $(2n + 1)/2$ (n een niet negatief geheel getal) liggen, en de orde van ieder andere dempingspool moet een geheel getal zijn. Het is inderdaad bekend dat de spiegelbeelddemping van een antimetrisch spiegelbeeld-laagdoorlatendfilter deze eigenschappen heeft zodat deze dus voor het referentiefilter en derhalve ook voor het te berekenen bedrijfsparameterfilter geldig zijn.

Is het te berekenen filter antimetrisch (symmetrisch referentiefilter) dan volgt uit de theorie der symmetrische spiegelbeeldparameterfilters dat de orde van iedere dempingspool een geheel getal moet zijn. Is het verder gewenst het filter m.b.v. een ladderschakeling te kunnen verwezenlijken, dan moet tenminste een dempingspool bij $\omega = \infty$ liggen omdat een laagdoorlatendeladderschakeling bij $\omega = \infty$ altijd een oneindig grote demping geeft (deze noodzakelijke voorwaarde is ook in de meeste gevallen voldoende). Antimetrische laagdoorlatendefilters, die aan deze eis voldoen, worden 'type *b*'-filters genoemd in tegenstelling met de 'type *a*'-filters die geen dempingspool bij $\omega = \infty$ hebben en daardoor alleen bij gebruik van gekoppelde spoelen kunnen worden verwezenlijkt. Verder onderscheidt men nog 'type *c*'-filters die tegenover de 'type *b*'-filters de eigenschap hebben, in ladderschakeling met gelijke ingangs- en uitgangsafsluitweerstand zonder gebruik van een ideale transformator realiseerbaar te zijn [8-10].

2. **Banddoorlatendefilters**

In dit geval volgen uit de theorie der antimetrische en symmetrische spiegelbeeldfilters respectievelijk de twee volgende regels:

Is het te berekenen filter symmetrisch (antimetrisch referentiefilter) dan moet er bij $\omega = 0$ een dempingspool van de orde $(2m + 1)/2$ en bij $\omega = \infty$ een dempingspool van de orde $(2n + 1)/2$ liggen (m en n twee niet negatieve gehele getallen), en de orde van iedere andere dempingspool moet een geheel getal zijn. Is het te berekenen filter antimetrisch (symmetrisch referentiefilter) dan moet de orde van iedere dempingspool een geheel getal zijn.

Verder moet een antimetrisch banddoorlatendfilter tenminste een dempingspool bij $\omega = 0$ en een dempingspool bij $\omega = \infty$ hebben als wij het filter m.b.v. een ladderschakeling wensen te verwezenlijken (ook hier is deze noodzakelijke voorwaarde meestal voldoende). Antimetrische banddoorlatendefilters die aan deze eis voldoen worden zoals de analoge laagdoorlatendefilters 'type *b*'-filters genoemd in tegenstelling met de 'type *a*'-filters die tenminste bij een van de twee frequenties $\omega = 0$ of $\omega = \infty$ geen dempingspool hebben. 'Type *c*'-filters hoeven hier niet beschouwd te worden omdat bij banddoorlatendefilters de impedantie altijd m.b.v. een of verscheidene Norton-transformaties kan gewijzigd worden.

4.5.5 Optimale banddoorlatendefilters

Zoals wij reeds uit de spiegelbeeldparametertheorie weten, is bij banddoorlatendefilters het meest economische filter niet noodzakelijk dat waardoor aan gegeven dempingseisen met het kleinst mogelijke aantal dempingspolen kan voldaan worden. De reden hiervoor is dat de prijs van een spoel gewoonlijk een veelvoud is van die van een condensator, en dat een filter van hogere graad eventueel met een kleiner aantal spoelen kan verwezenlijkt worden. Zo toont b.v. fig. 4.2*a* een banddoorlatendfilter met een dempingspool bij $f = f_1$, een dempingspool bij $f = f_2$, een halve dempingspool bij $f = 0$ en een halve dempingspool bij $f = \infty$. Liggen alle twee de dempingspolen in het bovenste spergebied dan kan geen enkel van de vijf spoelen van dit filter door een equivalentie transformatie geëlimineerd worden. Daarentegen heeft het filter van fig. 4.2*b* niet alleen één dempingspool bij f_1, één dempingspool bij f_2 (f_1 en f_2 beide in het bovenste spergebied) en een halve dempingspool bij $f = 0$, maar de dempingspool bij $f = \infty$ is nu van de orde $3/2$. Dit filter heeft dus een dempingspool meer dan het eerste bij $f = \infty$, niettegenstaande het feit dat het één spoel minder telt.

Hieruit zien wij dus, dat het gewoonlijk nuttig is de in hoofdstuk 6 te bespreken keuze van een filterstructuur niet na de keuze van het aantal en de ligging der dempingspolen maar gelijktijdig hiermee uit te voeren. Alleen hierdoor is het mogelijk, voor ieder gegeven filterprobleem de werkelijk meest economische oplossing te vinden.

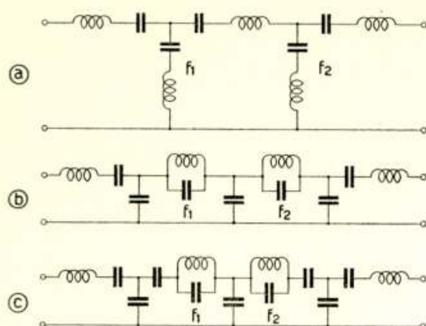


Fig. 4.2

a) Banddoorlatendfilter met impedanties van het Z_T type met twee bedrijfsdempingspolen bij eindige frequenties in het bovenste spergebied, een halve bedrijfsdempingspool bij $f = 0$ en een halve bedrijfsdempingspool bij $f = \infty$.

b) Banddoorlatendfilter met impedanties van het Z_T type dat in tegenstelling met het filter *a* m.b.v. slechts vier spoelen kan verwezenlijkt worden ofschoon er een volledige bedrijfsdempingspool méér is (een bijkomende pool bij $f = \infty$).

c) Equivalente vorm van het filter *b* waarbij echter de spoelen van de twee parallelkringen willekeurig kunnen gekozen worden.

Tenslotte willen wij nog kort op de schakeling van fig. 4.2*c* wijzen die een equivalente vorm van het filter van fig. 4.2*b* voorstelt en uit deze laatste door toepassing van een drievoudige Norton-transformatie ontstaat. Hierdoor hebben wij de mogelijkheid gekregen aan de spoelen van de twee parallelkringen een willekeurige zelfinductiewaarde te geven en deze daardoor op de meest voordelige wijze te kiezen (b.v. keuze voor optimale kwaliteitsfactor van deze twee spoelen of keuze voor gelijkheid van de zelfinductiewaarden van de vier spoelen van het filter).

4.5.6 De praktische berekening van de karakteristieke functie

Principieel kan de karakteristieke functie in ieder individueel geval m.b.v. (4.13) of (4.14) berekend worden als de spiegelbeeldoverdrachtsexponent Θ van het referentiefilter bekend is. Het is evenwel mogelijk de coëfficiënten van ψ voor een willekeurig gegeven aantal dempingspolen rechtstreeks als functie van de ontwerpgegevens uit te drukken. Voor laagdoorlatendefilters is dit door Pelz in de nieuwe uitgave van het boek van

Cauer [10]) gebeurd en de overeenstemmende formules voor banddoorlatendefilters zijn in [39]) berekend. In dit laatste geval zijn de zo verkregen formules echter tamelijk ingewikkeld zodat het hier voordelig is van bepaalde recurrente formules, die eveneens in [39]) afgeleid zijn, gebruik te maken. Al deze formules zijn in tabel I en II weergegeven waarbij wij voor laagdoorlatendefilters evenals voor banddoorlatendefilters van dezelfde notaties als in [39]) gebruik hebben gemaakt. De notatie M'_s in deze tabellen is de fundamentele symmetrische functie van de s^{de} orde van de μ parameters m'_i, d.w.z.

$$M'_0 = 1$$

$$M'_1 = \sum_{i=1}^{\mu} m'_i$$

$$M'_2 = \sum_{i \neq j} m'_i \, m'_j$$

$$M'_\mu = \prod_{i=1}^{\mu} m'_i$$

en

$$\binom{a}{b} = \frac{a\,!}{b!\,(a-b)!}$$

In tabel I evenals in tabel II gelden de formules van de linkerhelft voor antimetrische, en die van de rechterhelft voor symmetrische filters. Is een lijn echter niet door een verticale streep in twee gesplitst, dan gelden de formules voor de twee gevallen.

In [39]) is ook een reeks andere formules voor banddoorlatendefilters afgeleid, die vooral voor filters met een smalle doorlaatband van nut zijn. Daarenboven worden er ook de formules van Newton besproken die eventueel voor de berekening van de fundamentele symmetrische functies M'_s van nut kunnen zijn.

Verder is er in [38]) een andere volledige reeks recurrentieformules voor laag- en banddoorlatendefilters afgeleid die door V. Belevitch werden gesuggereerd en vooral voor de berekening m.b.v. electronische rekenmachines zeer praktisch zijn.

TABEL I

Laagdoorlatendefilters

f_c = grensfrequentie

f_n = dempingspoolfrequentie

$\Omega = f/f_c$

$\Omega_n = f_n/f_c$

$p = j\,\Omega$

ψ = karakteristieke functie

A_m = maximum demping in het doorlaatgebied

$H = \sqrt{e^{2A_m} - 1}$

$m_n = \sqrt{\dfrac{\Omega_n^2 - 1}{\Omega_n}}$

N = aantal dempingspolen, ieder pool met zijn multipliciteitsgraad gerekend.

M = aantal dempingspolen bij $f = \infty$; er wordt verondersteld dat deze polen genummerd zijn van $n = N - M + 1$ tot $n = N$.

N en M bevatten niet de halve pool bij $f = \infty$, die in het geval van antimetrische referentiefilters altijd vereist is.

Antimetrisch filter	*Symmetrisch filter*
(symmetrisch referentiefilter)	(antimetrisch referentiefilter)
$m'_{2n-1} = m'_{2n} = m_n$ voor $n = 1 \ldots N$	$m'_{2n-1} = m'_{2n} = m_n$ voor $n = 1 \ldots N$
	$m'_{2N+1} = 1$
$\mu = 2N$	$\mu = 2N + 1$
$A_u = \sum\limits_{r=0}^{u} M'_{2r} \binom{N-r}{N-u}$	$A_u = \sum\limits_{r=0}^{u} M'_{2r+1} \binom{N-r}{N-u}$

$$K = H \prod_{n=1}^{N-M} \Omega_n^2$$

$\psi = K \dfrac{\sum\limits_{u=0}^{N} A_u\, p^{2u}}{\prod\limits_{n=1}^{N-M} (p^2 + \Omega_n^2)}$	$\psi = Kp \dfrac{\sum\limits_{u=0}^{N} A_u\, p^{2u}}{\prod\limits_{n=1}^{N-M} (p^2 + \Omega_n^2)}$

TABEL II

Banddoorlatendefilters

f_{-c}, f_c = grensfrequenties

$f_0 = \sqrt{f_{-c}\, f_c}$

f_n = dempingspoolfrequentie

$\Omega = f/f_0$

$\Omega_n = f_n/f_0$

$p = j\,\Omega$

ψ = karakteristieke functie

A_m = maximum demping in het doorlaatgebied

$H = \sqrt{e^{2A_m} - 1}$

$b = (f_c - f_{-c})/f_0$

$m_n = \sqrt{\dfrac{f_{-c}}{f_c} \cdot \dfrac{f_n^2 - f_c^2}{f_n^2 - f_{-c}^2}}$

$m_0 = 1/m_\infty = \sqrt{f_c/f_{-c}}$

N = aantal dempingspolen, ieder pool met zijn multipliciteitsgraad gerekend.

M = aantal dempingspolen bij $f = \infty$; er wordt verondersteld dat deze polen genummerd zijn van $n = N - M + 1$ tot $n = N$.

N en M bevatten niet de halve pool bij $f = 0$ en de halve pool bij $f = \infty$, die in het geval van antimetrische referentiefilters altijd vereist zijn.

Antimetrisch filter	*Symmetrisch filter*
(symmetrisch referentiefilter)	(antimetrisch referentiefilter)
$m'_{2n-1} = m'_{2n} = m_n$ voor $n = 1 \ldots N$	$m'_{2n-1} = m'_{2n} = m_n$ voor $n = 1 \ldots N$
	$m'_{2N+1} = m_0$
	$m'_{2N+2} = m_\infty$
$\nu = \mu/2 = N$	$\nu = \mu/2 = N + 1$

$$A_u = \sum_{v=0}^{u} \sum_{w=0}^{\nu-u} \binom{v+w}{v} \binom{\nu - v - w}{u - v} M'_{2(v+w)}\, m_0^{2(\nu + v - u - w)}$$

of

$$A_u = \sum_{r=0}^{\nu} M'_{2r}\, B_{u,r}$$

$$B_{u,0} = \binom{\nu}{u} m_0^{2(\nu-u)} \qquad B_{0,r} = m_0^{2(\nu-r)}$$

$$B_{u,\nu} = \binom{\nu}{u} m_0^{2u} \qquad B_{\nu,r} = m_0^{2r}$$

$$B_{u,r} = B_{u-1,r-1} + m_\infty^2 (B_{u,r-1} - B_{u-1,r})$$

$$B_{\nu-u,\,\nu-r} = B_{u,r}$$

$$K = \frac{(m_0^2 - m_\infty^2)^\nu}{H \prod_{n=1}^{N-M} (\Omega_n^2 - m_\infty^2)}$$

$$\psi = \frac{\sum_{u=0}^{N} A_u p^{2u}}{K \prod_{n=1}^{N-M} (p^2 + \Omega_n^2)} \qquad \psi = \frac{\sum_{u=0}^{N+1} A_u p^{2u}}{m_0 K p \prod_{n=1}^{N-M} (p^2 + \Omega_n^2)}$$

5. **Het vormen van het polynoom** g

Is de karakteristieke functie ψ bekend, dan kennen wij ook h en f op een willekeurige gemeenschappelijke constante factor na, die wij gewoonlijk zo zullen kiezen dat de coëfficiënt van de term van de hoogste graad in ψ gelijk is aan 1.

Zoals in hoofdstuk 3 is uitgelegd bestaat het bepalen van g in hoofdzaak in het oplossen van de vergelijking

$$hh_* \pm f^2 = 0 \tag{5.1}$$

Deze kan voor symmetrische filters (h even en f oneven, of omgekeerd) in de vorm

$$h^2 - f^2 = 0 \tag{5.2}$$

geschreven worden. Deze laatste kan nu in de twee vergelijkingen

$$h + f = 0 \qquad \text{(a)}$$

en

$$h - f = 0 \qquad \text{(b)} \qquad (5.3)$$

gesplitst worden. Zoals wij gemakkelijk kunnen zien, gaat een van deze laatste twee vergelijkingen over in de andere als

wij $-p$ voor p substitueren zodat het dus in de praktijk voldoende is, een enkele ervan op te lossen. Een werkelijke verlaging van graad wordt door de vervanging van (5.2) door (5.3) echter niet verkregen omdat de vergelijkingen (5.3) dezelfde graad in p hebben als (5.2) in p^2.

In het antimetrisch geval kan (5.1) in de vorm

$$h^2 + f^2 = 0 \tag{5.4}$$

geschreven worden. Deze kan weer in twee vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{ll} h + jf = 0 & \text{(a)} \\ n - jf = 0 & \text{(b)} \end{array}\right\} \tag{5.5}$$

en (zie boven)

gesplitst worden die nog altijd uitsluitend van p^2 afhangen omdat h en f beide even polynomen in p^2 zijn. De graad in p^2 van de vergelijkingen (5.5) is dus de helft van de graad in p^2 van de oorspronkelijke vergelijking (5.4). De zo verkregen vereenvoudiging is echter meestal maar denkbeeldig omdat de coëfficiënten van de vergelijkingen (5.5), in tegenstelling met deze van (5.4), niet meer uitsluitend reëel zijn.

Wat nu de oplossing van de hierboven vermelde vergelijkingen betreft moeten wij naar de literatuur verwijzen [8, 10, 42–45]. Vermelden wij alleen, dat deze vergelijkingen meestal van te hoge graad zijn om rechtstreeks opgelost te kunnen worden. Men begint daarom gewoonlijk met een eerste benaderende waarde van een wortel die dan door stapsgewijze benadering tot de vereiste nauwkeurigheid wordt gebracht.

Deze nauwkeurigheid moet niet zo groot zijn als dikwijls wordt aangenomen. Het is niet vereist de polynomen f, g en h individueel met uiterste nauwkeurigheid te kennen; vereist is alleen dat deze een bij elkaar behorend systeem van karakteristieke polynomen vormen. Met andere woorden, kleine fouten zijn toegelaten, maar wordt een van de polynomen gewijzigd, dan moeten ook de beide andere gewijzigd worden, en wel zodanig dat aan de vergelijking (2.11) nog altijd met grote nauwkeurigheid voldaan wordt.

Natuurlijk kan men iedere moeilijkheid vermijden door de wortels van g bij gegeven f en h met zeer grote juistheid te berekenen. Eenvoudiger is het echter gewoonlijk ons hierbij met 3 á 4 cijfers tevreden te stellen, Hierdoor wordt de waarde

van $|g/f|$, en daarmee het dempingsverloop van het filter, meestal voldoende bepaald. Het is derhalve toegelaten de niet bekende decimalen van de wortels van g door nullen te vervangen en de zo verkregen waarden als absoluut juiste wortels van een nieuw polynoom g', dat uiteraard van het oorspronkelijke polynoom g slechts weinig zal verschillen, te aanvaarden.

Vervolgens moeten wij de met g' gewijzigde polynomen h' en f' bepalen. Beschouwen wij hiertoe vooreerst het symmetrisch geval en veronderstellen wij dat $a_1' \ldots a_n'$ de waarden zijn die door de hierboven beschreven wijziging uit de wortels $a_1 \ldots a_n$ van de vergelijking (5.3a) ontstaan. De gezochte polynomen f' en h' worden dan zeer gemakkelijk verkregen door het polynoom

$$\prod_{i=1}^{n} (p - a_i') \qquad (5.6)$$

in zijn even en oneven gedeelte te splitsen.

Voor antimetrische filters is het procédé volledig analoog. Alleen moet nu het met (5.5a) overeenstemmend polynoom in zijn reëel en imaginair gedeelte gesplitst worden.

Vermelden wij tenslotte nog dat de hier beschreven procédés voor de verbetering van de polynomen f en h hun zin verliezen als predistorsie wordt toegepast (zie par. 8) omdat dan toch in ieder geval een nieuw polynoom h, dat bovendien niet meer even of oneven is, moet berekend worden.

6. De keuze van de filterstructuur

6.1 *Algemene regel voor het bepalen van een filterstructuur*

In principe kan de berekening van het filter en de keuze van een structuur, waardoor het filter kan verwezenlijkt worden, gelijktijdig geschieden door de in par. 2 besproken methode van Darlington-Piloty stap voor stap toe te passen. In de praktijk is het echter gemakkelijker eerst een geschikte filterstructuur te bepalen; hiervoor is het eenvoudigst zich door een analogie met de spiegelbeeldparametertheorie te laten leiden en de volgende regel toe te passen die wij hier zonder bewijs laten volgen:

Regel

Beschouw een spiegelbeeldparameterfilter (hierna 'hulpfilter' genoemd) gedefinieerd als volgt:

a) Het is van hetzelfde type (laagdoorlatend, banddoorlatend;

symmetrisch of antimetrisch) als het te berekenen bedrijfsparameterfilter.

b) Zijn spiegelbeeldimpedanties aan beide zijden zijn van het constante-k type.

c) Zijn spiegelbeelddemping heeft hetzelfde aantal polen als het referentiefilter verminderd met een halve pool bij het oneindige voor een laagdoorlatendfilter, en verminderd met een halve pool bij het oneindige en een halve pool bij nul voor een banddoorlatendfilter.

Een structuur, waardoor het zo gedefinieerde hulpfilter kan verwezenlijkt worden, kan nu in het algemeen als structuur voor het te berekenen filter gebruikt worden. Natuurlijk zal men in de praktijk onder verschillende mogelijke structuren diegene kiezen die de meest economische verwezenlijking toelaat en die voldoet aan eventuele bijkomende eisen (parallelschakeling met andere filters, enz.).

Opmerking

In het geval van antimetrische filters mag men niet uit het oog verliezen dat de volgens de hierboven beschreven methode gevonden structuur een in ketting geschakelde ideale transformator moet bevatten. Zulk een transformator is inderdaad ook voor optimaal berekende antimetrische spiegelbeeldparameterfilters vereist als deze met gelijke ingangs- en uitgangsimpedanties worden afgesloten.

6.2 *Omvormen van de gevonden structuur in een ladderstructuur met minimum aantal elementen*

In het geval van banddoorlatendefilters is de volgens par. 6.1 gevonden structuur (waarvan wij natuurlijk veronderstellen dat zij een ladderstructuur is) meestal voor de berekening van de elementen nog niet geschikt omdat zij gewoonlijk geen ladderstructuur met minimum aantal elementen is. Noemen wij N het aantal elementen van een filterstructuur, dan is een ladderstructuur met minimum aantal elementen daardoor gekenmerkt dat N gelijk is aan het aantal onafhankelijke coëfficiënten van de overdrachtsfunctie $S_{12} = f/g$, d.w.z.

$$N = n_g + \frac{n_f}{2} + 1 \qquad \text{voor } f \text{ even}$$

en

$$N = n_g + \frac{n_f + 1}{2} \qquad \text{voor } f \text{ oneven}$$

waar n_g en n_f respectievelijk de graden van de polynomen g en f zijn.

Een ladderstructuur met minimum aantal elementen kan gewoonlijk gemakkelijk uit de oorspronkelijke structuur door toepassing van equivalentietransformaties (b.v. Norton-transformaties *) afgeleid worden. Hierbij valt op te merken, dat deze transformaties natuurlijk alleen principieel en niet numeriek moeten worden uitgevoerd (d.w.z., het moet in principe mogelijk zijn, zulk een omvorming op een structuur met gegeven numerieke elementwaarden uit te voeren).

Fig. 6.1

Bepaling van een structuur waarmee een filter met twee bedrijfsdempingspolen bij eindige frequenties in het bovenste spergebied, een halve bedrijfsdempingspool bij $f = 0$ en een bedrijfsdempingspool van de orde 3/2 bij $f = \infty$ kan verwezenlijkt worden.

a) elementaire cellen van het hulpfilter.

b) Ladderstructuur, die m.b.v. de onder *a* gegeven cellen opgebouwd is.

c) Met *b* equivalente ladderstructuur met minimum aantal elementen zonder ideale transformator.

d) Met *b* equivalente ladderstructuur met minimum aantal elementen waaronder één ideale transformator.

Beschouwen wij als voorbeeld een symmetrisch banddoorlatendfilter met één dempingspool bij f_1 en bij f_2 (f_1 en f_2 in het bovenste spergebied), een dempingspool van de orde $3/2$ bij $f = \infty$ en een dempingspool van orde $1/2$ bij $f = 0$. Het hiermee overeenstemmende, in par. 6.1 gedefinieerde hulpfilter heeft dus één spiegelbeelddempingspool bij elke van de drie frequenties f_1, f_2 en $f = \infty$ en kan m.b.v. de in fig. 6.1*a* aangegeven cellen, en dus ook m.b.v. de structuur van fig. 6.1*b*, verwezenlijkt worden. Verder wordt de overdrachtsfunctie S_{12} van het te berekenen filter gegeven door

$$S_{12} = \frac{f}{g} = A \, \frac{p\,(p^2 + \omega_1^2)\,(p^2 + \omega_2^2)}{\sum\limits_{i=0}^{8} A_i p^i}$$

*) Zie in verband hiermee de tweede voetnoot op blz. 346.

zodat $n_g = 8$ en $n_f = 5$. Bijgevolg moet een ladderstructuur met minimum aantal elementen precies

$$N = n_g + \frac{n_f + 1}{2} = 11$$

elementen bevatten.

Passen wij nu op elk van de drie shuntcondensatoren van fig. 6.1 *b* een Norton-transformatie van het in fig. 6.2 aangegeven type toe en noemen wij de hiermee overeenstemmende transformatieverhoudingen respectievelijk n_1, n_2 en n_3. Als wij hierbij het produkt $n_1 n_2 n_3 = 1$ kiezen, dan zal de nieuwe structuur nog altijd gelijke ingangs- en uitgangsimpedantie hebben en wij kunnen nog over twee van de drie parameters n_1, n_2 en n_3 vrij beschikken. In het bijzonder kunnen wij deze zo kiezen dat de met C_5 en C_6 overeenstemmende condensatoren van de nieuwe structuur oneindig groot worden zodat de in fig. 6.1 *c* aangegeven structuur verkregen wordt.

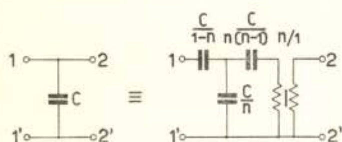


fig. 6.2
Norton-transformatie van een shunt-condensator.

In plaats van $n_1 n_2 n_3 = 1$ te eisen kunnen wij de drie parameters n_1, n_2 en n_3 natuurlijk ook zo bepalen dat de met C_4, C_5 en C_6 overeenkomende condensatoren van de nieuwe structuur alle drie oneindig groot worden waardoor wij de in fig. 6.1 *d* aangegeven structuur verkrijgen. Zoals wij gemakkelijk kunnen zien, hebben de structuren van de figuren 6.1 *c* en 6.1 *d* beide precies $N = 11$ elementen, de ideale transformator in fig. 6.1 *d* natuurlijk meegerekend.

7. Berekening van de elementen

7.1 *Berekening van de impedantie- admittantie- en kettingmatrices*

Zijn de polynomen f, g en h bekend, dan kunnen de impedantie-, de admittantie- en de kettingmatrix van het te berekenen filter gemakkelijk m.b.v. (2.2) (2.5) (2.12) en (2.13) berekend worden. Natuurlijk is het in het algemeen geenszins vereist, alle elementen van deze matrices werkelijk uit te rekenen. De kennis van twee, of eventueel drie, van deze elementen is voldoende, om het in par. 7.2 vermelde afsplitsingsproces te kunnen toepassen.

Het is ook nodig, zich ervan te overtuigen, of de m.b.v. (2.12) of (2.13) berekende matrices werkelijk met de gekozen filterstructuur overeenkomen. Inderdaad hebben wij in hoofdstuk 3 reeds gezien, dat het teken van g in principe willekeurig kan gekozen worden, en dat de vervanging van g door $-g$ op de vervanging van de oorspronkelijke vierpool door zijn duale vierpool neerkomt. Van de andere kant laat ons de in par. 6.1 gegeven regel eveneens steeds toe, een aan deze regel beantwoordende vierpool door zijn duale te vervangen. Hieruit blijkt duidelijk, dat het teken van g noodzakelijk in overeenstemming met de gekozen filterstructuur moet bepaald worden.

Over de waarden van de afsluitweerstanden R_1 en R_2 mogen wij in principe vrij beschikken alhoewel men in de meeste gevallen $R_1 = R_2$ zal kiezen. R_1 en R_2 van elkaar verschillend kan vooral dan nuttig zijn als het hierdoor mogelijk is, een ideale transformator, die niet door een Norton transformatie kan geëlimineerd worden, uit te sparen. Dit is b.v. voor antimetrische laagdoorlatendefilters van het type b, en algemeen voor laagdoorlatendefilters met predistorsie (zie hoofdstuk 8) het geval.

7.2 *Toepassing van het afsplitsingsproces*

De eigenlijke berekening van de elementen geschiedt het best m.b.v. het afsplitsingsproces van Bader dat reeds door Milort[4]) beschreven werd. Al naargelang de structuur, die wij voor de berekening van het filter gekozen hebben, is dit afsplitsingsproces echter niet altijd onmiddellijk toe te passen. Hoe men in dergelijke gevallen te werk kan gaan, zullen wij aan de hand van het filter van fig. 6.1 kort toelichten. Het spreekt vanzelf dat het hierbij alleen om een voorbeeld gaat en dat men in andere gevallen eventueel een iets andere, alhoewel principieel analoge methode moet toepassen.

Beschouwen wij in het bijzonder de twee equivalente figuren 6.1 c en 6.1 d. De structuur fig. 6.1 d kan zonder moeilijkheid m.b.v. het afsplitsingsproces berekend worden; willen wij echter van de in fig. 6.1 c aangegeven structuur uitgaan, dan kunnen wij weliswaar de zelfinducties L_1 en L_4 onmiddellijk m.b.v. deze methode berekenen, maar voor de capaciteiten K_4 en K_7 is dit niet meer mogelijk*).

*) Voor symmetrische filters is daarenboven $L_1 = L_4$ en $K_4 = K_7$. Wij willen van deze symmetrie eigenschappen hier echter geen gebruik maken omdat de hier beschreven redenering ook voor niet symmetrische gevallen geldig is.

Beschouwen wij daarom b.v. het grensgeval $p \to 0$. De in fig. 6.1*c* aangegeven structuur gaat hiervoor over in de structuur van fig. 7.1. Aan de andere kant weten wij, dat een richtingssymmetrische vierpool, waarvan de elementen van de

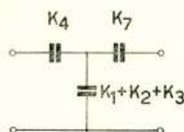


fig. 7.1
Grensgeval van de in fig. 6.1*c* afgebeelde structuur voor $f \to 0$.

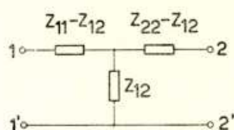


fig. 7.2
Equivalente *T*-schakeling van een richtingssymmetrische vierpool.

impedantiematrix Z_{11}, Z_{22} en Z_{12} zijn, altijd formeel*) door de in fig. 7.2 gegeven equivalente *T*-schakeling kan voorgesteld worden. Hieruit zien wij onmiddellijk dat de twee gezochte capaciteiten K_4 en K_7 evenals de som van de capaciteiten K_1, K_2 en K_3 m.b.v. de volgende betrekkingen kunnen berekend worden:

$$K_4 = \lim_{p \to 0} \frac{1}{p(Z_{11} - Z_{12})}$$

$$K_7 = \lim_{p \to 0} \frac{1}{p(Z_{22} - Z_{12})}$$

$$K_1 + K_2 + K_3 = \lim_{p \to 0} \frac{1}{p Z_{12}}$$

8. **Predistorsie**

De predistorsie geschiedt op precies dezelfde manier als voor filters met Tschebyschew II karakteristiek zodat wij op de details van deze methode hier niet verder moeten ingaan. Wij willen er alleen aan herinneren dat de predistorsie essentieel hierin bestaat, de nulpunten van het polynoom g met eenzelfde waarde ε naar rechts te verschuiven, het polynoom f door een

*) d.w.z. onafhankelijk ervan of de in fig. 7.2 optredende impedanties $Z_{11} - Z_{12}$, $Z_{22} - Z_{12}$ en Z_{12} al dan niet m.b.v. spoelen, condensatoren en ideale transformatoren kunnen verwezenlijkt worden.

nieuw polynoom f_1, dat zich van f alleen door een nader te bepalen constante factor onderscheidt, te vervangen, en een nieuw polynoom h_1 door de oplossing van de vergelijking

$$g_1 g_{1*} \mp f_1^2 = 0$$

zo te bepalen, dat de drie nieuwe polynomen f_1, g_1 en h_1 nog altijd aan de fundamentele betrekking (2.11) voldoen. Hierna geschiedt de verdere berekening van het filter op dezelfde manier als voor filters zonder predistorsie; alleen is het nieuwe, door f_1, g_1 en h_1 gedefinieerde filter essentieel onsymmetrisch. Als structuur voor de verwezenlijking van het nieuwe filter kan nog altijd dezelfde structuur als voor het oorspronkelijke filter zonder predistorsie gebruikt worden.

Filters met predistorsie eisen ongeveer tweemaal zoveel rekenwerk als filters zonder predistorsie. Dit is echter niet hun enig nadeel. Zo brengt de predistorsie noodzakelijk mee dat het filter aan de ingang evenals aan de uitgang een betrekkelijk hoge reflectiecoëfficiënt vertoont. Niet alleen is dit voor vele gevallen op zichzelf ongewenst, maar het heeft bovendien als gevolg een verhoogde gevoeligheid van de filterkarakteristiek voor slechte aanpassingen en afwijkingen van de elementen van hun nominale waarden. Hierdoor kan de toepassing van de predistorsie dikwijls zeer ongewenst worden. In deze gevallen is het vaak nog mogelijk, bijkomende dempingseffenaars te vermijden door het gebruik van elementen met hoge kwaliteitsfactor (b.v. kwartskristallen [46–50]) of door het bijvoegen van geschikte weerstanden op bepaalde plaatsen van de filterstructuur [51–54]).

Literatuuroverzicht

1. W. Th. Bähler, Theoretische inleiding van het symposium „Filtersynthese gebaseerd op het gebruik van functies met een complexe variabele", I en II, Tijdschr. Ned. Radiogen. vol. 25, blz. 255-296, 1960.
2. W. Nijenhuis, Benaderingsmethode van overdrachtsfuncties waarbij een rimpel zowel in het doorlaatgebied als in het dempingsgebied wordt voorgeschreven. Tijdschr. Ned. Radiogen., vol. 25, blz. 297-306, 1960.
3. W. Milort, De bepaling van de overdrachtsfunctie voor filters met Tschebyschew-eigenschappen in de overdrachtskarakteristiek. Tijdschr. Ned. Radiogen., vol. 25, blz. 307-317, 1960.
4. W. Milort, De synthese van laddernetwerken, die een voorgeschreven overdrachtsfunctie realiseren. Tijdschr. Ned Radiogen., vol. 25, blz. 319-336, 1960.
5. S. Darlington, Synthesis of reactance 4-poles, J. Math. Phys., vol. 18, blz. 257-353; september 1939.
6. W. Saraga, Insertion Parameter Filters, TMC Techn. Journ., vol. 2, No. 1, blz. 25-36.
7. E. Rumpelt, Ueber den Entwurf elektrischer Wellenfilter mit vorgeschriebenen Betriebsverhalten, Dissertation, Techn. Hochschule, München, 1947.
8. V. Belevitch, Topics in the Design of Insertion Loss Filters, IRE-Trans. on Circuit Theory, vol. CT-2, blz. 337-346; december 1955.
9. V. Belevitch, Théorie des Circuits de Télécommunication, Uystpruyst, Leuven, België, 1957.
10. W. Cauer, Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, 2. Auflage, Akademie-Verlag, Berlin, 1954.
Engelse uitgave, Synthesis of Linear Communication Networks, Mc Graw Hill, New York, 1958.
11. V. Fetzer, Die numerische Berechnung von Filterschaltungen mit allgemeinen Parametern nach der modernen Theorie unter besonderer Berücksichtigung der Cauerschen Arbeiten, Arch. Elekt. Uebertragung, Bd 5, blz. 499-508; november 1951.
12. V. Fetzer, Explizite Berechnungsformeln für Filterschaltungen mit allgemeinen Parametern, Arch. Elekt. Uebertragung, Bd. 8, blz. 31-46; januari 1954.
13. Saal and Ulbrich, On the Design of Filters by Synthesis, IRE-Trans. on Circuit Theory, vol. CT-5, No. 4, blz. 284-327; december 1958.
14. A. Fromageot, Détermination d'un filtre d'affaiblissement composite donné, Câbles & Transmissions, vol. 12, No. 4, blz. 247-268, oktober 1958.
15. V. Belevitch, Thèse de doctorat, Université Catholique de Louvain, 1945.
16. V. Belevitch, Fundamental results and outstanding problems in network synthesis, Tijdschr. Nederl. Radiogen. vol. 18, blz. 33-51; januari 1953.
17. H. J. Carlin, The Scattering Matrix in Network Theory, IRE-Trans. on Circuit Theory, vol. CT-3, No. 2, blz. 88-97; june 1956.
18. V. Belevitch, Elementary Applications of the Scattering Formalism to Network Design, IRE-Trans. on Circuit Theory, vol. CT-3, No. 2, blz. 97-104; juni 1956.
19. W. Cauer, Ein Reaktanztheorem, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., phys.-math. Kl. 30 (1931), blz. 673-681.

20. H. Piloty, Kanonische Kettenschaltungen für Reaktanzvierpole mit vorgeschriebenen Betriebseigenschaften, Telegr. Fernspr. Tech., vol. 29, blz. 249-258, 279-290, 320-325; september-november 1940.
21. T. E. Shea, Transmission Networks and Wave Filters, D. van Nostrand Co, New York, 1929.
22. V. Belevitch, Extension of Norton's Method of Impedance Transformation to Band-Pass Filters, Electrical Communication, vol. XXIV, pp. 59-65, maart 1947.
23. F. Scowen, An Introduction to the Theory and Design of Electric Wave Filters, 2nd edition, Chapman & Hall Ltd., London, 1950.
24. J. H. Mole, Filter Design Data for Communication Engineers, E. & F. N. Spon Ltd., London, 1952.
25. R. Feldtkeller, Einführung in die Siebschaltungstheorie der elektrischen Nachrichtentechnik, 4. Aufl., S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 1956.
26. T. Fujisawa, Realizability theorem on mid-series or mid-shunt low-pass ladders without mutual induction, IRE-Trans. on Circuit Theory, vol. CT-2, blz. 320-325, december 1955.
27. J. Meinguet, V. Belevitch, On the Realizability of Ladder Filters, IRE-Trans., vol. CT-5, No. 4, blz. 253-255, december 1958.
28. H. Watanabe, Synthesis of Band-Pass Ladder Network, IRE-Transactions on Circuit Theory, vol. CT-5, No. 4, blz. 256-264, december 1958.
29. V. Belevitch, Tchebychev Filters and Feedback Amplifier Design, Wireless Eng., vol. 29, blz. 106-110, april 1952.
30. W. Saraga and L. Fosgate, New graphical methods for analysis and design, Wireless Eng., vol. 29, blz. 68-72, maart 1952.
31. K. H. Haase, Zur Aufstellung der charakteristischen Funktion und Berechnung der Betriebsdämpfung symmetrischer und antimetrischer Betriebsparameter-Filter, Frequenz, vol. 6, blz. 168-179, mai 1952.
32. B. J. Bennett, Synthesis of electric filters with arbitrary phase characteristics, I.R.E., Convention Record, part 5, 1953.
33. P. L. Tschebyscheff, Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions, Oeuvres, vol. I, blz. 271-378, St. Petersburg, 1899.
34. S. Bernstein, Leçons sur les Propriétés Extrémales et la Meilleure Approximation des Fonctions Analytiques d'une Variable Réelle, Gauthier-Villars, Paris, 1926.
35. C. B. Sharpe, A General Tchebycheff Rational Function, Proc. I.R.E., vol. 42, blz. 454-457, februari 1954.
36. D. Helman, Synthesis of Electric Filters and Delay Networks Using Tchebycheff Rational Functions, Doctoral Dissertation, University of Michigan, 1955.
37. D. Helman, Tchebycheff Approximations for Amplitude and Delay with Rational Functions, Proc. of the Symposium on Modern Network Synthesis, New York, 1955.
38. A. Fettweis, Recurrence Formulae for the Calculation of the Characteristic Function of Filters with Tchebycheff Pass-Band Behaviour, Revue HF, vol. IV, No. 10, 1960, blz. 230-239.
39. A. Fettweis, Explicit Formulae for the Calculation of the Characteristic Function of Filters with Tchebycheff Pass-Band Behaviour, Revue HF, vol. IV, No. 12, 1960, blz. 263-271.

40. Rumpelt, Schablonenverfahren für den Entwurf elektrischer Wellenfilter, TFT, 31 (1942), blz. 203-210.
41. V. Belevitch, Elements in the Design of Conventional Filters, Electr. Comm., blz. 84-98 en 180, maart 1949.
42. T. C. Fry, Some numerical methods for locating roots of polynomials (zie in het bijzonder de „Postcript by R. L. Dietzold"), Bell Monograph B-1367.
43. L. Collatz, Das Hornersche Schema bei komplexen Wurzeln algebraischer Gleichungen, Z. angew. Matth. Mech., vol. 20, blz. 235-236, augustus 1940.
44. Fr. A. Willers, Die Methoden der praktischen Analysis, Leipzig und Berlin, 1928.
45. A. Fettweis, The use of phase templates for the design of insertion loss filters (to be published).
46. W. P. Mason, Electromechanical Transducers and Wave Filters, van Nostrand, New York, 1948.
47. Herzog, Siebschaltungen mit Schwingkristallen, Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden, 1949.
48. D. Indjoudjian et P. Andrieux, Les filtres à cristaux piézoélectriques, Gauthier-Villars, Paris, 1953.
49. W. Porschenrieder, Steile Quarzfilter grosser Bandbreite in Abzweigschaltung, Nachrichtentech. Z., Bd. 9, blz. 249-253, december 1956.
50. W. Porschenrieder, Die Wellenparametertheorie als einfaches Hilfsmittel zur Realisierung von Quarzbandfiltern in Abzweigschaltung, Nachrichtentechn. Z., Bd. 12, blz. 132-138, maart 1959.
51. H. Bode, US Patent No. 2.029.014.
52. W. Wolman. Die Ebnung der Wellendämpfung im Durchlassbereich von Siebketten, Arch. Elektrotechn., Band 40 (1950), blz. 30-36.
53. H. Matthes, Zur Ebnung der Verlustdämpfung von Grundkettenfiltern, Frequenz, Bd. 7, blz. 360-368, december 1953 en Bd. 8, blz. 17-28, januari 1954.
54. A. Fettweis, Belgisch Patent No. 590.984.

Manuscript ontvangen 27 november 1960.

HET INTERNATIONALE SYMPOSIUM OVER DATA TRANSMISSIE IN DELFT, 19—21 SEPTEMBER 1960.

Op initiatief van de Benelux sectie van het Institute of Radio Engineers, en met medewerking van de I.R.E. Professional Group on Communication Systems, het Nederlands Radiogenootschap en de sectie voor Telecommunicatietechniek van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs werd van 19 tot 21 september 1960 in het gebouw voor W. en S. te Delft een symposium over data transmissie gehouden.

De Symposium Commissie bestond uit dr. ir. H. C. A. van Duuren, voorzitter, Mr. B. B. Barrow, dr. F. L. H. M. Stumpers, ir. Y. Boxma, prof. dr. ir. L. Kosten, ir. H. Rinia, prof. ir. dr. J. van Soest. Voorts was er een commissie voor plaatselijke regelingen onder prof. Koster, en een damescomité onder voorzitterschap van Mevrouw van Soest.

Het Symposium trok ca. 520 bezoekers, wat de oorspronkelijke raming verre overtrof. Daarvan waren 270 Nederlanders, 79 Engelsen, 42 Fransen, 32 Duitsers, 23 Amerikanen, 20 Zweden, 16 Zwitsers, 12 Belgen, 11 Italianen, 7 Denen en enkele Canadezen, Tsjechen, Noren en Venezolanen.

De Technische Hogeschool had twee grote collegezalen beschikbaar gesteld. Van de 25 voordrachten werden er 18 tweemaal gegeven. De voordrachten waren in 7 groepen verdeeld — een groep nam een ochtend- of middagzitting in beslag — waarvan men er dus zes op zijn programma kon nemen. Van de meeste voordrachten waren afdrukken aan de zaal beschikbaar. Bovendien zal een groot deel ervan gepubliceerd worden in een speciaal nummer van de „Transactions on Communication Systems" van het I.R.E.

Op dinsdagavond werd een diner georganiseerd in het Kurhaus, waar Ir. Rinia en Ir. van der Toorn spraken namens de organiserende verenigingen, en Mr. Mac Farlan (president I.R.E.) de after dinner speech hield over de ingenieursopleiding.

De deelnemers waren over het algemeen zeer ingenomen met het programma van het symposium. Ook bij de buitenlandse bezoekers was men van mening dat dit symposium de vergelijking met andere zeer gunstig kon doorstaan, zowel wat betreft het peil der voordrachten, als wat betreft organisatie en outillage. Een succesvol symposium dus waarbij het succes voor een groot deel gebaseerd was op de stuwkracht, het organisatietalent en veel persoonlijk werk van Mr. Barrow, de secretaris van de Benelux Sectie van het I.R.E.

We zullen nu een kort overzicht geven van de technische details. Daarbij zullen we de bijdragen in enkele groepen indelen, nl.: 1. Experimentele resultaten. 2. Codering voor detectie en correctie van fouten. 3. Speciale technische methodes. 4. Complete systemen.

1. *Experimentele resultaten*

In de groep experimentele resultaten vindt men grote aantallen metingen aan foutenpercentages bij gebruik van telefoonlijnen, radioverbindingen, enz., zowel over korte als zeer lange afstand.

P. A. Chittenden besprak „Notes on the transmission of data at 750 baud over practical circuits". Hij gebruikte een phase-omkeer modulatie systeem van 750 baud op een draaggolf van 1500 Hz op lijnen van 100 tot 150 mijl lang (soms met een radioverbinding). Daar fouten veelal voorkomen in groepen van 10 tot 100 tekens, moet automatische correctie nogal gecompliceerd worden.

A. C. Croisdale „Mutilations occurring on telegraph circuits and proposals for improvements for purposes of data transmission". Op telegraaflijnen worden snelheden tot 200 baud gebruikt, o.a. over de verbindingen London-New York, Montreal, Singapore of Barbados en London-Leeds. Elektronische en elektromechanische comparateurs worden gebruikt bij de foutentelling. Automatische foutendetectie en retransmissie (ARQ) volgens het van Duuren systeem is niet voldoende voor zeer hoge eisen (1 op 10^6 fout), en suggesties voor verbetering worden gegeven.

A. Desblache „Data transmission experiments over the European network". Beschrijving van meetapparatuur voor een phase-omkeer systeem. Bij 1000 baud verbindingen over schakelstations krijgt men 1 op 10^4, en bij punt punt verbindingen 1 op 10^5. Bij 2000 km coaxiale verbindingen met goede egalisatie 1 op 10^5 fout bij een ingangensniveau van —17 dB.

R. G. Entiknaep „Errors in data transmission systems". Ook beschrijving van meetapparatuur. Onderzoek naar het optreden van fouten in groepen, en naar vorm en oorzaak van de impulsachtige storingen. De voorlopige resultaten lenen zich nog niet voor beschrijving in een eenvoudig wiskundig model.

B. Goldberg „H.F. radio data transmission". Een programma voor metingen over verbindingen van 5000 mijl (Ver. Staten-Hawaiï) met frequentie verschuiving of phase-modulatie. Voor minder fouten dan 1 op 10^4 tekens, heeft men minstens 35 dB signaal/ruis verhouding nodig en onder ongunstige omstandigheden 50 dB. Als men meer statistische gegevens over de verbinding heeft, zal men gaan zien naar het effect van geschikt ingevoerde redundanties.

G. Wildhagen „Some results of data transmission tests over long telephone circuits". Zowel phase-omkeermodulatie als frequentie verschuiving zijn toegepast op gehuurde telefoonverbindingen van ca. 1000 km lengte bij snelheden van 750, 1500 of 1625 baud. Blokken van 60 of 120 tekens worden geregistreerd, wanneer er een fout in zit. 250 miljoen binaire tekens per experiment!

E. P. G. Wright „Error rates and error distributions on data transmitted over switched telephone connections". Met elektronische meetapparatuur werden fouten statistieken verzameld voor lijnverbindingen in de buurt van Londen (via schakelstations) en over afstanden van 200 tot 600 mijl, met snelheden van 250 of 1000 baud. Bij laag ruisniveau vindt men van 40.000 blokken van 50 bits er 13 met 1 fout, 3 met 2 fouten en 2 met 5 fouten. Is de ruis waarneembaar, dan komen de fouten meer in groepen en vindt men op blokken van 50 soms 20 of meer foute tekens. De foutenverdeling hangt niet erg van de snelheid af.

2. *Codering voor detectie en correctie van fouten*

W. A. Bennett en F. E. Froehlich „Effectiveness of error procedures in digital data transmission". Men definieert een kanaal door de waarschijnlijkheid van een storing, de waarschijnlijkheid dat een storing n tekens beïnvloedt, en de waarschijnlijkheid, dat een teken in zo'n beïnvloede groep fout wordt afgedrukt. Voor aldus gedefinieerde kanalen berekent men de verbetering, die door toepassing van bijv. recurrente codes verkregen wordt. Daarnaast werd statistisch materiaal aan echte fm data transmissie (600 of 1200 baud) ontleend, gebruikt met corrigerende codes.

H. C. A. van Duuren „Error probabilities and transmission speed on circuits using error detection and automatic repetition of signals". Berekening van de kans op fouten, bij toepassing van de 4-3 code met terug vraag, in kanalen met Rayleigh fading. Toepassing van drempels, en koppeling van installaties (repetitie in beide kanalen tegelijk).

T. A. Maguire en E. P. G. Wright „The examination of error distributions for the evaluation of error-detection and error-correction procedures". Veel statistisch materiaal voor verbindingen met 250, 500, 1000 baud f.m. transmissie. Daaruit wordt afgeleid wat met enkele en meervoudige (in rijen en kolommen) pariteitscontroles aan fouten te detecteren is. Wanneer men de blokken van bijv. 50 tekens, waarin fouten voorkomen opnieuw uitzendt, kan men eenvoudig een zeer laag foutenpercentage bereiken (ongeveer 1 op 10^7).

J. Meggitt „Error correcting codes and their instrumentation for use in data transmission systems". Een teruggekoppeld lineair schuifregister wordt gebruikt om gemakkelijk fouten te corrigeren (wanneer het systeem dit kan). Toepassing op enkele en dubbele fouten corrigerende codes, codes die opvolgende fouten corrigeren, Bose-Chaudhuri codes. Een ingenieus systeem.

L. S. Schwartz „Design principles for digital feedback communication systems". Een overzicht van veel resultaten op het gebied van terugvraag systemen. Men kan de terugvraag mogelijkheid beperken tot bijv. tweemaal, men kan terugvragen tot men het zeker weet, men kan repeteren en integreren, drempels aanbrengen, rekening houden met fading, aannemen dat het terugvraag kanaal ruisvrij is, of zelf ook ruist, enz. Samenvatting van het werk van New York University op dit gebied.

3. *Speciale technische methodes*

F. J. Altman „Threshold performance of a multichannel FM receiver". Aangezien de theoretische krommen voor frequentiemodulatie ontvangst bij hoge ruisniveau's voor praktische doeleinden niet nauwkeurig genoeg bekend waren, heeft de schrijver een aantal interpolaties gegeven. (Met het effect van modulatie van de zender is hier geen rekening gehouden.).

D. A. Bell „Detection of telegraph signals". Correlatie detectie van codewoorden i.p.v. codetekens heeft voordeel bij redundante signalen. Quadratische detectie is in zo'n geval slechter dan lineaire detectie.

W. R. Bennett en F. E. Froehlich „Techniques for comparing modulation methods for data-transmission over telephone channels". Gebruik van een analogie-rekenmachine voor de studie van complete systemen. Toepassing op een viertallig phase modulatie systeem, en een f.m. systeem. Zowel distorsie als ruis worden in aanmerking genomen, en een getal wordt gedefinieerd, dat de kwaliteit van een kanaal kwantitatief weergeeft.

R. A. Gibby „An evaluation of FM system data performance by computer simulation". Een digitale rekenmachine wordt gebruikt om het modulatieproces, het transmissie kanaal en de detector te simuleren, en de kwaliteit van het systeem te beoordelen. (Dit laatste door het gemiddeld uitgangssignaal te vergelijken met het ingangssignaal.)

W. B. Jones Jr. „Anti-multipath modulation techniques for digital communication system". Om ondanks de pulsverlenging, die bij voortplanting langs verschillende wegen optreedt, toch met dezelfde snelheid te kunnen werken, worden i.p.v. één, vier frequentieparen gebruikt. Uit vergelijkende transmissie-proeven blijkt een grote verbetering in fouten percentage.

L. J. Labeyrey „High speed data transmission over a group link telephone channel". Door één zijband te combineren, met het restant van de andere (vestigal sideband) wordt een snelheid van 3300-3700 baud bereikt in de band van 60-108 kHz. in een groep verbinding.

M. Maniere en R. Benoit-Govin „Data transmission over telephone lines, a theoretical study of the distortion affecting FSK signals". Een periodiek signaal geeft bij frequentieverschuivings-modulatie een eenvoudig Fourier spectrum. Het kleine aantal frequenties maakt het gemakkelijk de distorsie door amplitude of phasefouten bij de transmissie na te rekenen.

R. M. Oberman „Start-stop data transmission without stop-element". Door het stop-teken te laten vervallen kan het normale Europese start-stop telegraaf systeem in snelheid verhoogd worden van 400 tot 500, of met speciale maatregelen, 600 woorden per minuut.

W. H. Tetley „The analytic prediction of electromagnetic environments". Discussie over het opstellen van een frequentie-verdelingsplan, waarbij vooral met storingen door radar-installaties rekening moet worden gehouden. Een rekenmachine slaat alle belangrijke gegevens op in een geheugen, om daarna tot analyse over te gaan, en de operationele problemen op te lossen. Een ambitieus programma.

D. G. Tucker „Synchronous demodulation of phase-reversing binary signals, and the effect of limiting action". Door de input klemmen te verwisselen met die

voor de oscillator kan men bij een modulator (van het schakeltype) een belangrijke verbetering in de signaal-ruis verhouding bereiken.

4. *Complete systemen*

R. J. Filipowsky en E. H. Scherer „Digital data transmission systems of the future". Vooruitgang in het vaste stoffen onderzoek zal, omdat de apparatuur steeds kleiner wordt, meer gecompliceerde codering en detectie toelaten. Verder wordt de informatiesnelheid voortdurend aangepast aan de wisselende vraag en kanaalcapaciteit. De toestand van het verbindingskanaal is, door enkele karakteristieke grootheden bepaald, steeds beschikbaar. Verhoogde automatisering geeft meer aanpasmogelijkheden.

H. K. M. Grosser „Thet telecommunication complex of an airline reservation system". Uitvoerige beschrijving van een luchtvaart-reserveringssysteem, dat de gehele continentale Verenigde Staten overdekt. Betrouwbaarheidsbeschouwingen. Beschrijving van de snelle schakel apparatuur (speciaal een magnetische pulsversterker), eind- en tussenstations, en procedures om fouten in de apparatuur te vinden en te herstellen. Dit systeem was het dichtst bij praktische installatie.

D. A. T. Reid „Communication for computers - the Sabre system". Een zeer snel data transmissie systeem, waarbij longitudinale redundante tekens fouten bestrijden: Beschrijving van agent installaties (met plaatselijk geheugen), vertragingstijd en toepassing voor een luchtvaart-reserveringssysteem.

Conclusies. De bijdragen tot het symposium geven inlichtingen over transmissie systemen in vele landen. Het is nog te vroeg, om te beoordelen welke codering het meest geschikt is voor betrouwbare data-transmissie, vooral waar experimentele condities nogal eens afwijken van theoretische aannamen, en veel voorgestelde codes nog niet aan praktische toepassing toekwamen.

Het ziet er wel naar uit, dat de codering nog met een terugvraagsysteem gecombineerd moet worden. Standardisatie en aanpassing van internationale en nationale verbindingen aan data-transmissie is ook nog een open probleem.

Waar het symposium de aandacht heeft gevestigd op problemen, op eenvoudige en meer gecompliceerde oplossingen, elk met hun eigen verdienste, en de gelegenheid heeft gegeven tot discussies onder de vele geïnteresseerden, heeft het stellig aan zijn doel beantwoord.

F. L. H. M. Stumpers

INSTRUMENT LANDING SYSTEM (ILS) VOOR ROTTERDAM.

Op 9 december jl. werd door de heer J. Schoo, Hoofd-directeur van de Nederlandse Standard Electric Maatschappij op het vliegveld Zestienhoven (Rotterdam) de nieuwe ILS apparatuur voor dit luchtvaartterrein overgedragen aan de Rijksluchtvaartdienst.

Namens deze dienst werd de installatie door de heer O. J. Selis, Directeur Rijksluchtvaartdienst en Hoofd van de afdeling Luchtverkeersbeveiliging, aanvaard.

Dit landingssysteem is door de internationale burgerluchtvaartorganisatie (I.C.A.O.) als standaardhulpmiddel erkend voor landingen tijdens omstandigheden van slecht zicht.

Het ILS bestaat uit een vijftal radiobakens, waarvan twee op en drie buiten het vliegveld zijn opgesteld.

Het belangrijkste baken is de koerslijnzender (localizer), welke uitzendt op een golflengte van ca. 2,75 meter en welke dient om het vliegtuig geleiding in het horizontale vlak (azimuth) te verschaffen door middel van een koerslijn. De koerslijnzender bevindt zich achter de landingsbaan (gezien vanuit het landende vliegtuig), precies op de verlengde hartlijn ervan en is geplaatst in een ondergronds gebouwtje.

Het tweede, eveneens zeer belangrijke, baken is de glijpadzender, welke rechts naast de baan staat, 285 meter voorbij het begin.

De glijpadzender zendt uit op een golflengte van ongeveer 90 cm en geeft het vliegtuig geleiding in het vertikale vlak (elevatie) door middel van een dalingslijn, die een hoek van 2,5 graad met de grond maakt. Verder bevinden zich op de verlengde hartlijn van de landingsbaan nog een drietal merkbakens, werkende op een golflengte van 4 meter, welke zijn opgesteld op afstanden van ongeveer 530 m., 1900 m. en 7 km. voor het begin van de landingsbaan.

Deze bakens dienen uitsluitend om de vlieger tijdens de nadering een aanwijzing te geven, omtrent de afstand, die hij nog van de landingsbaan verwijderd is. De uitzendingen van de koerslijn- en de glijpadzender worden in het vliegtuig opgevangen en weergegeven op een meetinstrument, waarop twee wijzers zijn aangebracht. Als deze wijzers loodrecht op elkaar staan, d.w.z. de ene verticaal en de andere horizontaal en zij elkaar dus juist in het midden van de schaal snijden, bevindt het vliegtuig zich in de juiste positie op de dalingslijn en op de koerslijn.

Bevindt het vliegtuig zich niet op de dalingslijn of op de koerslijn, dan vertonen de wijzers een uitslag, waaruit de vlieger onmiddellijk kan afleiden, wat hij moet doen om het vliegtuig in de juiste positie te brengen.

Wanneer de vlieger het vliegveld nadert licht bij het passeren van elk der merkbakens een lampje op. Dit lampje heeft voor elk merkbaken een verschillende kleur, zodat hij onmiddellijk kan zien welk merkbaken gepasseerd wordt.

Alle bakens zijn dubbel uitgevoerd; bij een technische storing wordt automatisch overgeschakeld op het reservebaken.

De koerslijnzender en glijpadzender zijn ontwikkeld door de Amerikaanse laboratoria van het International Telephone and Telegraph System en gebouwd door de tot dat concern behorende Italiaanse fabriek FACE Standard Milaan.

De apparatuur werd geleverd en, in nauwe samenwerking met de afd. Luchtverkeersbeveiliging van de Rijksluchtvaartdienst, geïnstalleerd door de Nederlandse Standard Electric Mij. N.V. te 's-Gravenhage, die het I.T.T. Systeem in Nederland vertegenwoordigt.

De drie merkbakens zijn van het fabrikaat Int. Wilcox Electric Inc. te Kansas City (U.S.A.).

De installatie komt in beheer en onderhoud bij de afd. Luchtverkeersbeveiliging van de Rijksluchtvaartdienst.

Er zijn drie verschillende soorten van ILS naderingen door vliegtuigen mogelijk nl.

1e automatische nadering, waarbij de ILS signalen worden ingevoerd in de automatische piloot van het vliegtuig;

2e semi-automatische nadering, waarbij de vlieger in het algemeen gebruik maakt van de „zero-reader";

3e gebruik van de ILS alleen met behulp van het „cross pointer" ILS boordaanwijsinstrument. In vliegertaal is dit een „met de hand gevlogen" ILS nadering.

Hoewel theoretisch en in het bijzonder bij de automatische nadering als hiervoor bedoeld een vliegtuig bij het slechtste zicht zou kunnen landen, doet men dit uit veiligheidsoverwegingen in de praktijk nog niet.

Elke luchtvaartmaatschappij heeft afhankelijk van verschillende faktoren zoals vliegtuig-type, baanlengte, e.d. z.g. „weerminima" vastgesteld, waar beneden het een vliegtuigbestuurder verboden is te landen.

Hij zal dan moeten uitwijken naar een andere luchthaven. Gemiddeld zijn deze weer-minima: 200 voet wolkenhoogte en 600 meter zicht. Uiteraard zou het van groot belang zijn, dat vliegtuigen onder alle weersomstandigheden op het vliegveld van bestemming zouden kunnen landen. Zowel in Amerika als in Engeland wordt dan ook naarstig gewerkt aan technische methoden om dit mogelijk te maken.

Dat hierbij ook grote psychologische problemen een rol spelen is uiteraard begrijpelijk. Er is in dit verband wel eens opgemerkt dat zodra de toestand is bereikt, dat een vliegtuig geheel automatisch, dus zonder menselijke besturing

zal kunnen landen, het toch wel, met het oog op de gemoedsrust van de luchtreizigers, gewenst is dat een piloot „op de bok" zit.

In de loop der jaren is de landingstechniek met behulp van ILS steeds meer geperfectioneerd, doch het behaalde voordeel werd steeds voor een gedeelte weer teniet gedaan door de hoger geworden landingssnelheden der moderne vliegtuigen.

TOEKENNING VEDER-PRIJZEN

Door het Bestuur van de Stichting Wetenschappelijk Radiofonds Veder zijn in 1961 prijzen toegekend aan de heren: Ir. L. Krul; J. W. A. van der Scheer, ing. (tijdelijk te Hollandia, Ned. Nw. Guinea); M. van Sliedregt; J. A. M. van Oosterhout; M. van Beveren. (respectievelijk links boven, links onder, rechts onder, rechts boven en links midden op de foto.)



De bij de prijstoekenning gegeven omschrijving luidt: „terzake van het door deze technici in samenwerking verrichte ontwikkelingswerk voor de experimentele 3 cm-straalverbinding voor telefonie tussen Goes en Roosendaal".

Het onderzoek, door de prijswinnaars en assistenten op het Dr. Neher Laboratorium te Leidschendam verricht, betrof zowel de theorie als het experiment; met een experimentele 3 cm-straalverbinding als een concreet object was in meer algemene zin de doelstelling van het onderzoek, waarmede vóór ca. 8 jaren een aanvang werd gemaakt, de ontwikkeling en constructie van straalverbindingsapparatuur en de hiermede verbonden problematiek. Destijds leefde reeds in het PTT-bedrijf de gedachte, dat straalverbindingen niet slechts voor televisie, doch in het bijzonder voor de overdracht van een groot aantal telefoniekanalen, in de toekomst een belangrijke plaats naast kabelverbindingen zouden kunnen innemen; voor het PTT-Laboratorium was hiermede tevens een taak weggelegd.

Een aantal publikaties hebben op het onderzoek betrekking:

1. *Ir. L. Krul*

   Publ. „De Ingenieur" van 8 juli 1960
   „Het PTT-Bedrijf", deel 10, no 2, juli 1960
   „De experimentele 3 cm-straalverbinding voor telefonie tussen Goes en Roosendaal"

2. *J. W. A. van der Scheer*

   Publ. a. zie boven
   b. „Tijdschrift van het NRG", deel 22, no. 6, november 1957
   „A portable instrument for measurements on I.F. level on FM microwave radio links"

3. *M. van Sliedregt*

   Publ. „Tijdschrift van het NRG", deel 22, no. 6, november 1957
   „A waveguide filter theory"

De eerste publikatie omvat een beschrijving van de experimentele 3 cm-straalverbindingsapparatuur en een behandeling van de bij straalverbindingsapparatuur optredende problemen; in de derde publikatie worden enkele nieuwe gezichtspunten naar voren gebracht met betrekking tot de berekening van golfpijpfilters.

CONGRESSEN e.d.

Fachtagungen NTG

Van 11 tot 14 april 1961 zal een congres worden gehouden in Karlsruhe met als onderwerpen:
„Aufnahme und Verarbeitung von Nachrichten durch Organismen" en
„Lernende Automaten".
Inlichtingen zijn te verkrijgen bij het Nachrichtentechnische Gesellschaft im VDE (NTG), Frankfurt a.M., S 10, Stresemann Allee 21.

Convention British IRE 1961

Van 5 tot 9 juli 1961 wordt door het British IRE een Symposium georganiseerd in de Oxford Universiteit met als onderwerp:
„Radio Techniques and Space Research".
Inlichtingen bij British IRE, 9 Bedford Square, London, WC 1.

Polytechnic Institute of Brooklyn

Het elfde internationale symposium dat 4, 5 en 6 april 1961 zal worden gehouden is gewijd aan:
„Electromagnetics and Fluid-dynamics of gaseous Plasma".
Het adres is: 55 Johnson Street, Brooklyn 1, New York.

BOEKAANKONDIGING

In de serie Natuurwetenschappelijke Pockets van Elsevier verscheen „*Geheimen van het Magnetisme*", een goede vertaling van „Magnets" van Francis Bitter. Het boekje geeft in autobiografievorm een aardig overzicht van de ontwikkeling van het magnetisme en zijn toepassingen. Prijs *f* 1,90.

BOEKBESPREKINGEN

Bandrecording, door A. van Maaren, uitgave: De Muiderkring, 1960, 112 pagina's, afm. 21 x 14 cm. Prijs *f* 5,50.

Het is een goede gedachte geweest van de schrijver om zijn kennis betreffende de registratie van spraak en muziek met behulp van magnetische verschijnselen onder de aandacht van een breder publiek te brengen. Onder dit publiek verstaat hij, zoals in de inleiding naar voren wordt gebracht, zowel de serieuze amateur als de gebruikers van de meest eenvoudige of meest professionele apparatuur. De opzet was om met een minimum aan wiskunde een inzicht te geven in het proces van opnemen en weergeven dat optreedt bij wat met een minder fraai woord „bandrecording" wordt genoemd. Wie dit boek doorleest zal tot de ontdekking komen dat de schrijver daarin goed is geslaagd.

Na een oppervlakkige inleiding in enkele fundamentele begrippen van de elektriciteit en het magnetisme, bedoeld als toelichting voor de amateur, volgt een uitstekende beschrijving van het opneemproces gevolgd door enkele praktische aanwijzingen.

Vervolgens worden enkele belangrijke eigenschappen van de magnetofoonband beschreven, aangevuld met toelichtingen voor het meten en de fabricage van de band.

Daarna wordt een beschrijving geboden van het weergaveproces en het wissen die eveneens instructief is.

Met een hoofdstuk over snelheidsvariaties wordt het hoofdgedeelte afgesloten.

Als appendix zijn o.a. enkele opmerkingen over de eenheid decibel ingevoegd die op zich zelf wat zwak zijn en weinig zullen bijdragen tot een inzicht in de chaos die op dit gebied bestaat.

Een interessante literatuurlijst besluit het geheel.

Overzien we het geheel dan kunnen we constateren dat geen receptenboek is geleverd voor de bouw van een magnetofoon, maar een boek dat de achtergronden van de magnetische registratie en weergave duidelijk belicht.

Voor ieder die iets met deze materie te maken heeft is het de moeite van het kennis nemen waard. De onnauwkeurigheden die hier en daar in tekst en tekeningen optreden, doen aan deze opvatting geen afbreuk.

C. de J.

Electronica door Prof. H. de Waard. W. de Haan N.V. Zeist, 1960. 217 blz., afm. 13,5 x 21 cm. Prijs *f* 12,50.

Dit in de Academische Bibliotheek van de uitgeversmaatschappij W. de Haan N.V. te Zeist verschenen deeltje van de hand van de Groningse hoogleraar H. de Waard mag gezien de schaarste aan niet-specialistische literatuur over dit onderwerp in het Nederlands zeker welkom worden genoemd.

Men dient zich te realiseren, dat het samenstellen van een dergelijk werk bij de chaos van onderwerpen en effecten met hun onderlinge verwevenheid, die door de elektronica worden omvat, geen eenvoudige zaak is. Men dient een scherpe selectie uit het materiaal te maken om binnen een handelbaar bestek te blijven, waarin de lezer het overzicht niet verliest. Het is de verdienste van de schrijver

van „Electronica", dat hij zijn keuze heeft weten te beperken en ongetwijfeld in grote lijnen die facetten naar voren heeft gebracht, die belangrijk, fundamenteel en representatief zijn.

Dat er aan de andere kant in een dergelijk werk en zeker in een eerste uitgave punten zijn, die bij deze of gene minder in de smaak vallen, is onvermijdelijk. Zo ben ik minder gelukkig met de motivering, die de schrijver in het voorwoord voor het beperken van de wiskundige behandeling geeft. Juist een verrassend punt van de elektronica is dat men door goede technieken toe te passen soms met beperkte middelen onverwacht grote nauwkeurigheid kan bereiken en deze door berekening kan voorspellen. Natuurlijk horen dergelijke berekeningen in dit boek niet thuis, maar men kan uit de argumentatie van de schrijver de indruk krijgen, dat hij achter de natte-vinger- of de hier-en-daar-een-C'tje-technieken zou staan, wat zeker zijn bedoeling niet is.

De meeste lezers zullen het stellig op prijs stellen iets te vernemen over de aard en de zin van het onderwerp, waarover zij gaan lezen, voor ze aan de zware kost worden gezet. Men zou derhalve voor een korte inleiding willen pleiten.

Voorts kan men in sommige details qua keuze of wijze van behandelen met de schrijver van smaak verschillen.

De uitvoering van het boek laat weinig te wensen over. Bij een volgende druk zal zeker zorg worden gedragen voor het verwijderen van een aantal drukfouten, waarvan er één — a_0 in plaats van a_t in de tiende regel van onder in de tekst van bladzijde 168 — zeer misleidend is.

„Electronica" bevat veel wetenswaardigs en kan derhalve geïnteresseerden, die in kort bestek een indruk van de betrokken materie willen opdoen, zeker worden aanbevolen. Wie na lezing het behandelde in praktijk wil brengen houde in het oog, dat de omvang van het boek de schrijver een enorme beperking heeft opgelegd en dat de gegeven schakelvoorbeelden als voorbeelden bedoeld zijn en dus niet altijd de beste schakelingen weergeven die men voor een bepaald doel kan kiezen.

J. J. Z. v. Z.

Uit het Nederlands Radiogenootschap

EXAMENCOMMISSIE N.R.G.

Examen Televisietechnicus

Zoals u bekend is heeft de Examencommissie van het Nederlands Radiogenootschap zich vanaf 1955 belast met het afnemen van het examen ter verkrijging van het diploma *Televisie-technicus.*

Aanvankelijk werd dit examen tweemaal per jaar afgenomen; sinds enkele jaren slechts éénmaal per jaar, zulks in verband met het geringe aantal aanmeldingen.

Nu gebleken is, dat de belangstelling voor dit examen zeer gering blijft, acht het bestuur van het NRG het ongewenst dit examen, naast het inmiddels ingestelde examen Radio-Electronicus NRG te handhaven.

Het bestuur heeft derhalve besloten *het examen voor Televisie-technicus voor de laatste maal af te nemen in het voorjaar van 1962.*

Verslag van het examen voor radiotechnicus en radiomonteur gehouden in het najaar 1960.

De schriftelijke examens werden gehouden op 10 en 17 oktober 1960. De mondelinge examens vonden plaats op 17, 18, 21, 22, 29, 30 november, 6, 7 en 15 december 1960.

Het resultaat van het examen is hieronder vermeld.

SCHRIFTELIJK

	deelgenomen	vrijstelling	afgewezen
radiotechnicus	234	—	138
radiomonteur	216	—	108

MONDELING

	deelgenomen	afgewezen	herexamen	geslaagd
radiotechnicus	96	43	5	48
radiomonteur	108	42	5	61

HEREXAMEN

	deelgenomen	afgewezen	geslaagd
radiotechnicus	8	—	8
radiomonteur	21	1	20

Aan 1 candidaat radiotechnicus (P. van de Poll, Leiden) werd de WERA-fonds examenprijs toegekend.

NIEUWE LEDEN

Ir. H. J. van Bethlehem, Beyerincklaan 12, Hilversum.
Ir. A. Boesveld, Händellaan 35, Voorschoten.
Dr. Ir. H. J. Heijn, Griendstraat 13, Geldrop.
Elwood R. Horwinski, 15, Rue de la Faisanderie, Paris — XVI.
Ir. C. Kraay, Simon Stevinweg 82, Hilversum.
Ir. J. van Lottum, Griendstraat 28, Geldrop.
Th. J. Nieland, Karel Doormanlaan 100, Hilversum.
J. L. Ooms, p/a N.V. Philips Phonografische Industrie, Gerrit van der Veenlaan 4, Baarn.
E. L. Ros, Van Boetzelaerlaan 148, Den Haag.
Ir. W. J. Schoenmakers, Beemdstraat 23, Geldrop.
Ch. L. Seeger, Sterrewacht, Leiden.
Ir. F. Sloof, De Gaarde 452, Den Haag.
B. Swets, Bilderdijklaan 44, Hilversum.
Ir. G. L. Walther, Willem de Zwijgerstraat 69, Eindhoven.

VOORGESTELDE LEDEN

Ir. H. Allaries, Rulstraat 26, Geldrop (Philips).
Ir. J. C. Balder, Wisse 3, Geldrop (Philips).
Ir. H. Breimer, Beneden Beekloop 58, Geldrop (Philips).
Ir. Ph. Hanhart, Prinses Marijkelaan 2, Den Hoorn (post Delft).
Ir. L. J. Hartog, Frederik van Eedenplein 3, Antwerpen L.O.
N. van Hurck, Welschapsedijk 135, Eindhoven (Philips).
P. H. J. A. Kleijnen, Sint Odastraat 19, Eindhoven (Philips).
Ir. G. R. Kunnen, Langstraat 34, Geldrop (Philips).
J. F. Lansu, Joh. Geradtsweg 96, Hilversum (PTI).
J. A. M. van Oosterhout, Julius Röntgenlaan 22, Leidschendam (PTT-DNL).
Ir. J. van der Plas, Bremweg 12, Huizen N.H. (Philips, Huizen).
Ir. G. C. van Slagmaat, Burchtstraat 150, Nijmegen (Philips, Nijmegen).
Ir. J. A. Smit, Spoorzichtlaan 5, Heemstede (RVO-TNO).
Ir. J. M. Verloop, p/a Het Nederlandse Postmuseum, Zeestraat 82, Den Haag.

NIEUWE ADRESSEN VAN LEDEN

Prof. Ir. J. W. Alexander, St. Eustatiusstraat 11, Delft.
H. J. J. Bouman, ing., Laan van Nieuw-Oost-Indië 168, Den Haag.
Ir. D. J. Braak, Zeevaartweg 47, Hilversum.
Ir. J. Domburg, de Bontstraat 2, Son.
Ir. G. Franken, Leenderweg 292, Eindhoven.
L. Ensing, Prins Hendriklaan 13, Rijswijk Z.H.
Ir. P. A. H. Hart, Bredalaan 103, Eindhoven.
Ktz. J. C. Jurrjens, Nachtegaallaan 67, Son.
H. Kok, p/a Bleekstraat 5, Eindhoven.
Ir. C. Kraaij, Simon Stevinweg 82, Hilversum.
Ir. H. J. Kramer, Van der Welstraat 9, Hilversum.
Ir. C. J. van Loon, Merellaan 11, Leende N.B.
Ir. W. Milort, Van der Welstraat 7, Hilversum.
Ir. J. C. de Munck, Julianalaan 125, Delft.
Ir. J. Mulder, Karel Doormanlaan 118, Hilversum.
Dr. Ir. L. Ongkiehong, Fresiaplein 7, Wassenaar.
Ir. F. H. Plas, Roos van Dekamastraat 18, Gouda.
Ir. H. A. Rodrigues de Miranda, Scheependomlaan 17a, Nijmegen.
Dipl. Ing. G. A. Baron van Till, Kempenbergerweg 43a, Arnhem.
K. A. B. Tubbing, Delflandstraat 61, Nootdorp.
Ir. H. H. van de Ven, Van der Meijstraat 7, Eindhoven.
Ir. M. J. Vermeijden, Waalsdorperweg 297, Den Haag.
Ir. J. N. Vos, Javalaan 16, Hilversum.
Ir. R. M. G. Wijnhoven, Aartshertogenlaan 190, Den Bosch.
Ir. P. Zijlstra, Kievitlaan 3, Eindhoven.
